Walter Tholen

RELATIVE BILDZERLEGUNGEN UND ALGEBRAISCHE KATEGORIEN

1974

Mathematik

Relative Bildzerlegungen und algebraische Kategorien

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaften im Fachbereich Mathematik
der Westfälischen Wilhelms-Universität zu Münster

vorgelegt von
Walter Tholen
aus Meppen (Ems)

- 1974 -

Γλαύκη

Dekan: Prof. Dr. N. Schmitz

1. Referent: Prof. Dr. D. Pumplün

2. Referent:

Tag der mündlichen Prüfung:

INHALTSVERZEICHNIS

EINLEITUNG

Ursprüngliches Ziel dieser Arbeit war es, eine möglichst einfache funktorielle Beschreibung des Zusammenhangs zwischen der klassischen universellen Algebra und ihren kategoriellen Darstellungsformen zu geben sowie die Eigenschaften der auftretenden Algebrenkategorien, insbesondere die Frage nach der Existenz von Bildzerlegungen, Colimites und freien Algebren bei beliebiger Grundkategorie, zu untersuchen. Die Bearbeitung dieser Probleme hat dann recht bald zu allgemeineren Untersuchungen und Begriffsbildungen geführt, deren Ergebnisse keineswegs mehr nur zur Anwendung auf Kategorien gewisser algebraischer Objekte geeignet sind.

Ausgangspunkt der vorliegenden Untersuchungen ist der Begriff der (lokalen) Bildzerlegung relativ zu einem vorgegebenen Funktor, der als gemeinsame Verallgemeinerung der Bildfaktorisierung in einer Kategorie und des Begriffs des adjungierten Funktors konzipiert ist und deren engen Zusammenhang deutlich machen soll. Er umfaßt im einzelnen

(I) die auf Isbell und Kennison zurückgehenden Bikategorie-Strukturen, also die von zahlreichen Autoren behandelten Bildzerlegungen in Kategorien (vgl. z.B. [20], [30], [38], [39], [41], [42], [43], [59], [60], [62], [63], [66], [80]),

(II) die besonders von Herrlich ([32], [33]) und Freyd - Kelly [20] verwendeten Faktorisierungen von Kegeln in Kategorien,

(III) die ebenfalls von Herrlich [28] behandelten "(Generating, Extremal-Mono)"- und "(Extremal Generating, Mono)"-Faktorisierungen, bei denen erstmals ein allgemeiner Funktor als Parameter auftritt,

(IV) die von Kaput [40] eingeführte lokale Linksadjungierbarkeit eines Funktors und damit insbesondere die durch einen Funktor mit Linksadjungiertem induzierte Faktorisierbarkeit über die Adjunktionseinheit.

Die relativen Bildzerlegungen erweisen sich als geeignete Grundlage zur gemeinsamen Untersuchung von Bildern in Kategorien, deren Liftung längs Funktoren sowie in Verbindung mit Freyds "Adjoint Functor Theorem" zum Existenznachweis adjungierter Funktoren und speziell von Colimites in Kategorien.

Bevorzugte Anwendungskategorien für die allgemeine Theorie sind in dieser Arbeit alle konkreten Kategorien, deren Vergißfunktor in die Mengen sich als Kompositum "algebraischer" und "topologischer" Funktoren sowie von Inklusionsfunktoren gewisser reflexiver und coreflexiver Unterkategorien ergibt. Dabei wird jedoch nur selten auf die Grundkategorie "Mengen" zurückgegriffen, sondern für jeden Typ der genannten Funktoren die Frage der Liftbarkeit von Bildern, Colimites und - sofern es sich um den Vergißfunktor einer Algebrenkategorie handelt - freien Algebren allgemein untersucht, um die entstehenden Sätze anschließend baukastenmäßig zusammenzusetzen. Aus Homogenitätsgründen sind dabei ganz bewußt auch viele wohlbekannte oder nur geringfügig veränderte Sätze mitaufgenommen worden.

So werden in Kap.I zunächst kurz die beiden Typen "algebraischer" und "topologischer" Funktoren bereitgestellt, die im folgenden immer wieder auftreten werden, nämlich monadische Funktoren und Top-Kategorien. Der Vorteil des Begriffs der Monade (= Tripel, Standardkonstruktion), der erstmals bei Godement [22] auftritt und dessen Bedeutung zur Beschreibung algebraischer Objekte über einer Kategorie durch die Arbeit

von Eilenberg und Moore ([15], 1965) aufgezeigt wurde, besteht im engen Zusammenhang zum Adjunktionsbegriff, der von Pumplün [58] funktoriell beschrieben wurde und hier als "globale Struktur-Semantik-Adjunktion" gedeutet wird (vgl. (1.14)). Angenehm für konkrete Anwendungen erwies sich die Konstruktion von Eilenberg-Moore durch Becks Charakterisierungssatz [6], der in dieser Arbeit in der eleganteren Formulierung von Paré [52] benutzt wird. Entsprechende Untersuchungen konstruktiver oder axiomatischer Art erfolgten für "topologische" Funktoren erst ab 1970 und fanden ihren Niederschlag in Arbeiten von Wyler [82], Wischnewsky [75], Hoffmann [36], Herrlich [33] und einigen anderen Autoren. Die hier benötigten Begriffe des (bezüglich eines Funktors) initialen und finalen Morphismus oder Kegels, der (Co-)Faserung und der Top-Kategorie (= Initialstrukturkategorie) werden in §2 zusammen mit einigen vergleichenden Betrachtungen eingeführt.

Zur Untersuchung der in Kap.II behandelten Bildzerlegungen relativ zu einem Funktor und einer Morphismenklasse werden zunächst die Eigenschaften der bei solchen Zerlegungen auftretenden und durch eine Galoiskorrespondenz verbundenen Morphismenklassen aufgeführt (§3), die im Spezialfall des identischen Funktors mit den von Pumplün [59] und Ringel [62] beschriebenen Eigenschaften übereinstimmen. §4 stellt die Verbindungen zwischen den relativen Bildzerlegungen, der (lokalen) Adjungierbarkeit und den Bildzerlegungen in Kategorien her. Insbesondere wird die Frage beantwortet, unter welchen Bedingungen Kaputs lokale Adjunktionen mit den üblichen übereinstimmen (vgl. (4.8)). Die beiden in §5 bewiesenen Existenzsätze (vgl. (5.1) und (5.4)) schließen die entsprechenden Untersuchungen von Herrlich ([26], [28]) ein und gestatten insbesondere ein Existenzkriterium für lokale Adjungierbarkeit. Kegelfaktorisierungen werden aus Bildzerlegungen in Kategorien hergeleitet.

In Verbindung mit dem Adjoint Functor Theorem werden in Kap.III mit Hilfe der relativen Bildzerlegungen Adjungierte und Colimits konstruiert, wobei als weiteres Hilfsmittel eine verallgemeinerte Version des Satzes von Dubuc [10] über adjungierte Dreiecke bewiesen wird (vgl. (6.6)), die insbesondere einen recht einfachen Beweis für entsprechende Sätze aus [61] ermöglicht. §7 enthält neben einem stark vereinfachten Beweis für eine verallgemeinerte Version des Lintonschen Covollständigkeitssatzes für monadische Kategorien (vgl. (7.4)), einen allgemeinen Liftungssatz für Colimites (vg. (7.1)) sowie einen "inneren" Existenzsatz für Colimites (vgl. (7.9)).

Kap.IV behandelt den zweiten wichtigen Spezialfall der relativen Bildzerlegungen und beschäftigt sich mit Bildern in Kategorien und deren Erzeugung (Liftung) durch Funktoren. Nachdem in §8 die Erzeugung allgemeiner Bildzerlegungen längs monadischer und topologischer Funktoren sowie der Inklusionsfunktoren (co-)reflexiver Unterkategorien dargestellt ist, werden in §9 Existenz und Erzeugung regulärer Bilder behandelt und ein allgemeiner Liftungssatz für reguläre Bilder bewiesen (vgl. (9.12)). Dieser wird zu einer Charakterisierung der regulär-epireflexiven Unterkategorien monadischer Kategorien benutzt (vgl. (10.9)), die zeigt, daß die Axiome der algebraischen Kategorien im Sinne von Herrlich [27] nicht an die Kategorie der Mengen gebunden sind. Als Ergänzung werden unter schwachen Voraussetzungen, die insbesondere in den algebraischen Kategorien im Sinne von Herrlich erfüllt sind, die Isomorphiesätze der Algebra (Homomorphiesatz, 1. und 2. Noetherscher Isomorphiesatz) und das Lemma von Zassenhaus (vgl. (11.9)) bewiesen.

Kap.V wendet sich dem ursprünglichen Ziel der Arbeit zu und beschreibt in §12 zunächst mit Hilfe von Adjunktionen den Zusammenhang zwischen den Typen gleichungsdefinierter Birkhoffscher Algebren, den algebraischen

Theorien im Sinne von Lawvere [45] und Linton [46] und den Monaden über der Kategorie der Mengen. Als Hilfsmittel wird dabei eine Adjunktion "Erweiterung des Stellenzahlbereiches" benutzt (vgl.(12.6)), die durch eine Pushoutbedingung charakterisiert ist und bei Rangbetrachtungen nützlich erscheint. Außerdem wird völlig analog zur Vorgehensweise in der kommutativen Algebra das Tensorprodukt algebraischer Theorien eingeführt (vgl.(12.11)), das ebenfalls durch eine Pushoutbedingung bestimmt ist. In §13 wird gezeigt, daß alle diese Konstruktionen verträglich sind mit dem Übergang zur zugehörigen Algebrenkategorie und somit insbesondere Gleichungstypen, algebraische Theorien und Monaden über den Mengen "semantisch äquivalent" sind. Es bedeutet daher keine Einschränkung der Allgemeinheit, daß für den Rest der Arbeit nur noch Algebrenkategorien zu algebraischen Theorien betrachtet werden, zumal keine Rangbeschränkung vorliegt. Nachdem in §13 alle interessierenden Existenzkriterien für Bilder, Limites und Colimites in derartigen Algebrenkategorien zusammengestellt sind (vgl.(13.5)), kommt es in §§14,15 darauf an, die über den Mengen als existent nachgewiesenen freien Algebren für eine möglichst große Klasse von Funktoren zu liften, wobei aber auf die Mengen nicht mehr Bezug genommen wird. So werden in §14 insbesondere die Untersuchungen von Ertel [16] auf den Fall einer beliebigen Grundkategorie übertragen (vgl.(14.9)), ohne daß dabei der von Ertel betrachtete Fall der "Stetigkeit in gewissen Variablenfamilien" beibehalten wird, was freilich nicht mit prinzipiellen Schwierigkeiten verbunden wäre. Der in §15 abschließend bewiesene allgemeine Liftungssatz für freie Algebren erweitert den Bereich der zulässigen Basiskategorien über die in §14 behandelten Kategorien hinaus und hat gegenüber dem Existenzsatz von Freyd - Kelly [20] den Vorteil, daß keine Rangbeschränkung vorliegt.

In einem Anhang werden noch einige Bildzerlegungen in der (Meta-)Kategorie aller Kategorien dargestellt und somit einige Funktortypen kategoriell charakterisiert. Außerdem wird auf sehr einfache Weise ein konstruktiver Beweis für die Existenz von Coegalisatoren in der Kategorie der Kategorien geführt (vgl. (A.7)), der als Ergänzung zu den Existenzsätzen aus §7 gedacht ist.

Besondere mengentheoretische Voraussetzungen werden in dieser Arbeit nicht getroffen. Wenn an einigen Stellen der Rahmen der klassischen Mengenlehre durch Bildung von "Klassen von Klassen" gesprengt wird, mag der Leser entweder auf eine solche Bildung verzichten und die betreffende Aussage geeignet umformulieren oder Universen zur Hilfe nehmen oder sonstige mengentheoretische Vorkehrungen seines Geschmacks treffen.

Ich möchte es hier nicht versäumen, meinem Lehrer, Herrn Professor Pumplün, ganz herzlich für die intensive Betreuung der Arbeit, seine Hilfsbereitschaft und sein Interesse zu danken. Auf Fortgang und Gestaltung der Arbeit hatten seine Hinweise den entscheidenden Einfluß. Für wertvolle Anregungen bin ich außerdem Herrn Professor Wyler und Herrn Dr. Wischnewsky zu Dank verpflichtet.

Münster (Westfalen), im März 1974.

0. Bezeichnungsweisen und Terminologie

(0.1) Im folgenden bezeichnet K, evtl. indiziert, stets eine Kategorie. K^* ist die zu K duale Kategorie. Funktoren werden, wenn nichts anderes gesagt ist, als covariant vorausgesetzt. Die Identität auf einem Objekt in einer Kategorie wird immer mit dem Objekt selbst identifiziert, so daß insbesondere unter K auch der identische Funktor auf K oder unter F auch der identische Morphismus von Funktoren auf F zu verstehen ist. $\mathrm{Ob}K$ bezeichnet die Klasse der Objekte in K, $K(A,B)$ für $A,B \in \mathrm{Ob}K$ die Klasse aller Morphismen $f\colon A \longrightarrow B$ in K, die der Einfachheit halber stets als klein vorausgesetzt wird, und $\mathrm{Ber}(f) := A$ ist der Bereich von f, $\mathrm{Cob}(f) := B$ der Cobereich. Folgende Teilklassen von K sind von Interesse:

Mono(K) :	Monomorphismen
Ext-Mono(K) :	extreme Monomorphismen (s.z.Bsp. [26])
Reg-Mono(K) :	reguläre Monomorphismen (s.z.Bsp. [21])
Egal(K) :	Egalisatoren (=Differenzkerne)
Co-Retr(K) :	Coretraktionen (=Schnitte)

Die dualen Klassen heißen Epi(K), Ext-Epi(K), Reg-Epi(K), Co-Egal(K) und Retr(K). Außerdem sei $\mathrm{Iso}(K) := \mathrm{Retr}(K) \cap \mathrm{Co\text{-}Retr}(K)$.

(0.2) Eine Teilklasse $X \subset K$ heißt stark universell (in K), wenn für jedes verallgemeinerte Pullback $(p_i)_{i\in I}$ einer nicht-leeren Familie $(x_i)_{i\in I}$ von K-Morphismen mit gemeinsamem Cobereich aus $x_i \in X$, $i \in I-\{i_0\}$, schon $p_{i_0} \in X$ folgt. Folgt aus $x_i \in X$, $i \in I$, auch $p := x_i p_i \in X$, so heißt X

abgeschlossen gegen verallgemeinerte Pullbacks. Bei Beschränkung auf $|I| = 2$ ergeben sich die Begriffe universell bzw. abgeschlossen gegen Pullbacks. $\mathcal{K}$ hat verallgemeinerte $\mathcal{X}$-Pullbacks, wenn für jede Familie $(x_i)_{i\in I}$ von $\mathcal{X}$-Morphismen mit gemeinsamem Cobereich ein Pullback $(p_i)_{i\in I}$ mit $p := x_i p_i \in \mathcal{X}$ existiert, und $\mathcal{K}$ hat $\mathcal{X}$-Urbilder, wenn für alle $x \in \mathcal{X}$ und $f \in \mathcal{K}$ mit demselben Cobereich ein Pullback

(0.2.1)
$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "x'"'] & \cdot \arrow[d, "x"] \\ \cdot \arrow[r, "f"'] & \cdot \end{tikzcd}$$

mit $x' \in \mathcal{X}$ existiert.

(0.3) Mit $\langle P_0, P_1\rangle$ wird die durch $P_i\colon \mathcal{K}_i \longrightarrow \mathcal{K}$, $i=0,1$, induzierte Kommakategorie bezeichnet: Objekte sind Tripel (A_0, f, A_1) mit $f\colon P_0(A_0) \longrightarrow P_1(A_1)$, und einem Morphismus $(u_0,u_1)\colon (A_0,f,A_1) \longrightarrow (B_0,g,B_1)$ liegen Morphismen $u_i\colon A_i \longrightarrow B_i$, $i=0,1$, mit $P_1(u_1)f = g\,P_0(u_0)$ zugrunde. Für $G\colon \mathcal{K}_1 \longrightarrow \mathcal{K}_0$ und $A \in \mathrm{Ob}\mathcal{K}_0$ setzt man $\langle A_0, G\rangle := \langle \Delta(A_0), G\rangle$ mit dem trivialen Funktor $\Delta(A_0)\colon \mathbb{1} := \{0\} \longrightarrow \mathcal{K}_0$, $\Delta(A_0)(0) = A_0$. Die Elemente in

$$\mathrm{Mor}(G) := \bigcup_{A_0 \in \mathrm{Ob}\mathcal{K}_0} \mathrm{Ob}\langle A_0, G\rangle$$

heißen G-Morphismen; statt $(A_0, f_0, A_1) \in \mathrm{Mor}(G)$ wird einfach $(f_0, A_1) \in \mathrm{Mor}(G)$ oder $f_0\colon A_0 \longrightarrow G(A_1)$ in $\mathcal{K}_0$ geschrieben.

$\mathrm{Mor}(G)$ enthält die Teilklasse $\mathrm{Epi}(G)$ der G-Epimorphismen (f_0, A_1), für die aus $G(x_1)\,f_0 = G(y_1)\,f_0$, $\mathrm{Ber}(x_1) = A_1 = \mathrm{Ber}(y_1)$, stets $x_1 = y_1$ folgt. Ist $\mathcal{E}_0 \subset \mathrm{Mor}(G)$ eine Teilklasse, so betrachtet man für $A_0 \in \mathrm{Ob}\mathcal{K}_0$ die volle Unterkategorie $\langle A_0, \mathcal{E}_0\rangle$ von $\langle A_0, G\rangle$, deren Objekte zu $\mathcal{E}_0$ gehören. Besitzt $\langle A_0, \mathcal{E}_0\rangle$ für alle $A_0 \in \mathrm{Ob}\mathcal{K}_0$ ein Skelett mit kleiner Objektklasse, so heißt G $\mathcal{E}_0$-coklein.

Für $G = \mathcal{K}_1 = \mathcal{K}_0 =: \mathcal{K}$ werden für $\mathcal{M} \subset \mathcal{K}$ und $A \in \mathrm{Ob}\mathcal{K}$ dual auch die Kategorien

$\langle \mathcal{M}, A\rangle$ betrachtet. Im Falle $\mathcal{M} \subset \mathrm{Mono}(\mathcal{K})$ heißen dort Infima $\mathcal{M}$-Durchschnitte und Suprema $\mathcal{M}$-Vereinigungen. Letztere heißen epimorph, wenn der durch eine $\mathcal{M}$-Vereinigung gegebene diskrete Cokegel ein Δ_I-Epimorphismus ist ($\Delta_I\colon \mathcal{K} \longrightarrow [I, \mathcal{K}]$ kanonische Einbettung, I diskret). Für $\mathcal{E} \subset \mathrm{Epi}(\mathcal{K})$ spricht man dual von $\mathcal{E}$-Codurchschnitten und (monomorphen) $\mathcal{E}$-Covereinigungen.

(0.4) Für $\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{K}_0$ heißt $G\colon \mathcal{K}_1 \longrightarrow \mathcal{K}_0$ (schwach) $\mathcal{M}_0$-abgeschlossen oder (schwach) abgeschlossen gegen $\mathcal{M}_0$-Morphismen, wenn für alle $m_0\colon A_0 \longrightarrow G(B_1)$ in $\mathcal{M}_0$, $B_1 \in \mathrm{Ob}\mathcal{K}_1$, ein $A_1 \in \mathrm{Ob}\mathcal{K}_1$ mit $G(A_1) = A_0$ $(G(A_1) \cong A_0)$ existiert. Eine Unterkategorie $\mathcal{K}_1 \subset \mathcal{K}_0$ heißt (schwach) $\mathcal{M}_0$-abgeschlossen, wenn der Inklusionsfunktor (schwach) $\mathcal{M}_0$-abgeschlossen ist. Dual: (Schwach) $\mathcal{E}_0$-coabgeschlossen.

Ist noch eine Teilklasse $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{K}_1$ gegeben, so sagt man, daß G (identitiv) $\mathcal{M}_1$-Morphismen aus $\mathcal{M}_0$-Morphismen erzeugt, wenn für alle $m_0\colon A_0 \longrightarrow G(B_1)$ in $\mathcal{M}_0$ ein $m_1\colon A_1 \longrightarrow B_1$ in $\mathcal{M}_1$ mit $G(m_1) \cong m_0$ $(G(m_1) = m_0)$ in $\langle \mathcal{K}_0, G(B_1)\rangle$ gilt. In diesem Fall ist G natürlich schwach $\mathcal{M}_0$-abgeschlossen ($\mathcal{M}_0$-abgeschlossen). Für $\mathcal{M}_i = \mathrm{Mono}(\mathcal{K}_i)$, $i=0,1$, sagt man einfach, daß G (identitiv) Monomorphismen erzeugt; entsprechend für reguläre Monomorphismen und Isomorphismen. (Funktoren, die identitiv Isomorphismen erzeugen, heißen auch transportierbar.)

(0.5) Hat $\mathcal{K}$ für eine kleine Kategorie $\mathcal{D}$ alle $\mathcal{D}$-Limites, so heißt $\mathcal{K}$ $\mathcal{D}$-vollständig (dual: $\mathcal{D}$-covollständig). $\mathcal{K}$ heißt (endlich) vollständig, wenn $\mathcal{K}$ für alle kleinen (endlichen) $\mathcal{D}$ $\mathcal{D}$-vollständig ist, und man sagt, $\mathcal{K}$ hat Produkte, wenn $\mathcal{K}$ für alle kleinen, diskreten $\mathcal{D}$ $\mathcal{D}$-vollständig ist. Dabei ist stets $\mathcal{D} = \emptyset$ zugelassen, so daß eine vollständige Kategorie oder eine Kategorie mit Produkten stets ein Endobjekt besitzt. Einen ($\mathcal{D}$-)Limites-erhaltenden Funktor nennt man auch ($\mathcal{D}$-)stetig (dual: ($\mathcal{D}$-)costetig).

Insbesondere erhalten (Produkt-)stetige Funktoren Endobjekte.

Eine Teilklasse $X \subset K$ heißt abgeschlossen gegen $\mathcal{D}$-Limites, wenn gilt: Ist ein Morphismus von Funktoren ϕ: $F_o \longrightarrow F_1$ mit F_o, F_1: $\mathcal{D} \longrightarrow K$ punktweise in X und ist (λ_i, L_i) Limes zu F_i, $i=0,1$, so ist auch der durch $\lambda_o \Delta(f) = \phi\lambda_1$ bestimmte Morphismus f: $L_o \longrightarrow L_1$ in X (Δ: $K \longrightarrow [\mathcal{D},K]$ kanonische Einbettung in die Funktorkategorie). Gilt das für alle (endlichen) diskreten $\mathcal{D}$, so heißt X abgeschlossen gegen (endliche) Produkte.

(0.6) $\mathcal{D}$ sei ein kleine Kategorie. G: $K_1 \longrightarrow K_o$ erzeugt $\mathcal{D}$-Limites (dual: $\mathcal{D}$-Colimites), wenn für jedes F: $\mathcal{D} \longrightarrow K_1$ und jeden Limes (λ_o, L_o) von $G \circ F$ ein Kegel λ_1: $\Delta_1(L_1) \longrightarrow F$ existiert, so daß gilt:

(1) $(G \circ \lambda_1, G(L_1)) \overset{\sim}{=} (\lambda_o, L_o)$ in der Kommakategorie $\langle \Delta_o, G\ F \rangle$,

(2) (λ_1, L_1) ist ein Limes von F.

G erzeugt identitiv $\mathcal{D}$-Limites, wenn man (1) durch (1') ersetzen kann:

(1') $(G \circ \lambda_1, G(L_1)) = (\lambda_o, L_o)$.

G erzeugt $\mathcal{D}$-Limites exakt (eindeutig), wenn G identitiv $\mathcal{D}$-Limites erzeugt und (λ_1, L_1) durch (1') und (2) (durch (1')) eindeutig bestimmt wird.[1] Die Vorsilbe $\mathcal{D}$ wird bei Quantifizierung über alle $\mathcal{D}$ weggelassen.

Man stellt sofort die folgenden einfachen Eigenschaften fest: Ist K_1 ($\mathcal{D}$-) vollständig und G ($\mathcal{D}$-)stetig, so erzeugt G ($\mathcal{D}$-)Limites. Ist K_o ($\mathcal{D}$-) vollständig und erzeugt G ($\mathcal{D}$-)Limites, so ist K_1 ($\mathcal{D}$-)vollständig und G ($\mathcal{D}$-) stetig. G erzeugt genau dann eindeutig ($\mathcal{D}$-)Limites, wenn G exakt ($\mathcal{D}$-)Limites erzeugt und ($\mathcal{D}$-)Limites reflektiert. Erzeugt G ($\mathcal{D}$-)Limites und identitiv Isomorphismen, so erzeugt G identitiv ($\mathcal{D}$-)Limites.

Erzeugt die Inklusion einer vollen Unterkategorie K' von K (identitiv) Produkte, so heißt K' schwach Produkt-abgeschlossen (Produkt-abgeschlossen) in K.

[1] "Erzeugt eindeutig" wird in [66] mit "erschafft" und in [49] mit "erzeugt" bezeichnet.

I. MONADEN UND TOP-KATEGORIEN

1. Monaden und Adjunktionen - Struktur und Semantik

(1.1) Eine Adjunktion ist ein Quadrupel (F,G,ε,η) mit einem Funktor G: $K_1 \longrightarrow K_o$, dessen Linksadjungiertem F: $K_o \longrightarrow K_1$, der Einheit η: $K_o \longrightarrow G \circ F$ und der Coeinheit ε: $F \circ G \longrightarrow K_1$, die die Gleichungen

$$(G \circ \varepsilon)(\eta \circ G) = G \ , \ (\varepsilon \circ F)(F \circ \eta) = F$$

erfüllen.

Morphismen von Adjunktionen führt man mit Hilfe des folgenden Lemmas ein (vgl. [57], [69], [80]):

(1.2) LEMMA: (F,G,ε,η), $(F',G',\varepsilon',\eta')$ seien Adjunktionen mit G: $K_1 \longrightarrow K_o$, G': $K_1' \longrightarrow K_o'$. K_i: $K_i \longrightarrow K_i'$, $i=0,1$, seien Funktoren und γ: $K_o \circ G \longrightarrow G' \circ K_1$, μ: $F' \circ K_o \longrightarrow K_1 \circ F$ Morphismen von Funktoren. Dann sind folgende Gleichungen äquivalent:

(1.2.1)

(i) $(\gamma \circ F)(K_o \circ \eta) = (G' \circ \mu)(\eta' \circ K_o)$

(ii) $(\varepsilon' \circ K_1)(F' \circ \gamma) = (K_1 \circ \varepsilon)(\mu \circ G)$

(iii) $\mu = (\varepsilon' \circ K_1 \circ F)(F' \circ \gamma \circ F)(F' \circ K_o \circ \eta)$

(iv) $\gamma = (G' \circ K_1 \circ \varepsilon)(G' \circ \mu \circ G)(\eta' \circ K_o \circ G)$

$$\begin{tikzcd} K_1 \arrow[r, shift left, "G"] \arrow[d, "K_1"'] & K_o \arrow[l, dashed, shift left, "F"] \arrow[d, "K_o"] \arrow[dl, bend right, "\gamma"'] \\ K_1' \arrow[r, shift left, "G'"] \arrow[u, dotted, bend left, "\mu"] & K_o' \arrow[l, dashed, shift left, "F'"] \end{tikzcd}$$

Insbesondere bestimmen sich γ und μ gegenseitig eindeutig.

Ist eine der äquivalenten Bedingungen (1.2.1) erfüllt, so ist dadurch ein Morphismus (K_o, K_1, μ, γ): $(F,G,\varepsilon,\eta) \longrightarrow (F',G',\varepsilon',\eta')$ definiert, wobei man die offensichtliche (vertikale) Komposition einführt. Auf diese Weise erhält man (unter mengentheoretischen Vorsichtsmaßnahmen) die Kategorie $\mathcal{Adj}$ der Adjunktionen, die bei Hinzunahme der offensichtlichen horizontalen Komposition sogar die Struktur einer strikten Doppelkategorie trägt (vgl.z.Bsp. [60]). $\mathcal{Adj}$ enthält die objektgleichen Unterkategorien Adj_o bzw. Adj_1, die nur aus solchen Morphismen bestehen, für die μ bzw. γ die Identität ist. Für jede Kategorie K hat man eine Unterkategorie $\mathit{Adj}_i(K) \subset \mathit{Adj}_i$, deren Morphismen gerade die Forderung $K_o = K$ in (1.2) erfüllen, $i=0,1$.

(1.3) Jede Adjunktion (F,G,ε,η) induziert eine Monade $t := (T,\eta,\mu) := (G{\circ}F,\ \eta,\ G{\circ}\varepsilon{\circ}F)$ über K_o, die durch die Gleichungen

$$\mu(\eta{\circ}T) = \mu(T{\circ}\eta) = T\ ,\ \mu(\mu{\circ}T) = \mu(T{\circ}\mu)$$

charakterisiert wird. Sind $t = (T,\eta,\mu)$ bzw. $t' = (T',\eta',\mu')$ Monaden über K bzw. K', so liegt einem Morphismus von Monaden $(K,\tau)\colon t \longrightarrow t'$ ein Funktor $K\colon K \longrightarrow K'$ und ein Morphismus von Funktoren $\tau\colon K{\circ}T \longrightarrow T'{\circ}K$ zugrunde, so daß gilt:

(1.3.1)
(1) $\tau(K{\circ}\eta) = \eta'{\circ}K$
(2) $\tau(K{\circ}\mu) = (\mu'{\circ}K)(T'{\circ}\tau)(\tau{\circ}T)$

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "T"] \arrow[d, "K"'] & K \arrow[d, "K"] \arrow[dl, phantom, "\tau"] \\ K' \arrow[r, "T'"'] & K' \end{tikzcd}$$

Durch Einführung einer (vertikalen) Komposition erhält man (bei geeigneter Mengenlehre) eine Kategorie Mon_o, derart daß die oben beschriebene Zuordnung einen Funktor

$$R_o\colon \mathit{Adj}_o \longrightarrow \mathit{Mon}_o$$

induziert. Indem man die Richtung von τ umkehrt und die Verträglichkeitsbedingungen (1.3.1) entsprechend modifiziert, kann man ebenso eine Kategorie Mon_1 und einen Funktor

$$R_1\colon \mathit{Adj}_1 \longrightarrow \mathit{Mon}_1$$

definieren. Betrachtet man nur Monaden über der festen Kategorie K und Morphismen von Monaden mit $K = K$, so erhält man die Unterkategorie $\mathit{Mon}(K) \subset \mathit{Mon}_o$. $\mathit{Mon}(K)^*$ ist als Unterkategorie von Mon_1 aufzufassen. Durch Einschränkung ergeben sich Funktoren ${}_K R_o\colon \mathit{Adj}_o(K) \longrightarrow \mathit{Mon}(K)$ und ${}_K R_1\colon \mathit{Adj}_1(K) \longrightarrow \mathit{Mon}(K)^*$.

(1.4) Zu jeder Monade $t = (T,\eta,\mu)$ über K definiert man die Eilenberg-Moore-Kategorie K^t über K: Objekte sind die t-Algebren (A,a) mit $A \in \mathrm{Ob}K$, $a \in K(T(A),A)$, $a\eta(A) = A$ und $a\mu(A) = aT(a)$, und einem t-Homomorphismus $\bar{f}\colon (A,a) \longrightarrow (B,b)$ liegt ein K-Morphismus $f\colon A \longrightarrow B$ mit $fa = bT(f)$ zugrunde. Der vergeßliche Funktor $G^t\colon K^t \longrightarrow K$ hat einen Linksadjungierten F^t mit Einheit η und Coeinheit ε^t, derart daß die zugehörige Adjunktion die Monade t induziert. Diese wird durch folgende universelle Eigenschaft charakterisiert (vgl. [58], [66], [67], [70]):

(1.5) PROPOSITION: (F,G,ε,η) sei eine Adjunktion wie in (1.1) und $t = (T,\eta^t,\mu)$ eine Monade über K. Dann existiert zu einem Morphismus $(K_o,\tau)\colon R_1(F,G,\varepsilon,\eta) \longrightarrow t$ in Mon_1 genau ein Funktor $K_1\colon K_1 \longrightarrow K^t$ mit

(1.5.1) $$G^t{\circ}K_1 = K_o{\circ}G \quad \text{und} \quad \tau = G^t{\circ}\nu\ .$$

Dabei ist ν der eindeutig bestimmte Morphismus von Funktoren, derart daß $(K_o,K_1,\nu,G^t K_1)\colon (F,G,\varepsilon,\eta) \longrightarrow (F^t,G^t,\varepsilon^t,\eta^t)$ ein Morphismus von Adjunktionen ist. Wenn insbesondere $(K_o,\tau) = (K,T)$ die Identität auf t ist, so ist (1.5.1) gleichwertig mit

$$G^t{\circ}K_1 = G \quad \text{und} \quad K_1{\circ}F = F^t\ .$$

Es ist dann $\nu = F^t$ und $\varepsilon^t{\circ}K_1 = K_1{\circ}\varepsilon$. K_1 heißt (semantischer) Vergleichsfunktor.

(1.6) Die Charakterisierung (1.5) führt zu einer vollen, reflexiven Einbettung

$$E_1\colon \mathit{Mon}_1 \longrightarrow \mathit{Adj}_1$$

mit dem Reflektor R_1, $R_1{\circ}E_1 = \mathit{Mon}_1$ (vgl. [58], [70], [81]). Insbesondere hat man für jede Kategorie K eine volle, reflexive Einbettung ${}_K E_1\colon \mathit{Mon}(K)^* \longrightarrow \mathit{Adj}_1(K)$ mit dem Reflektor ${}_K R_1$ (vgl. [66]).

(1.7) Man nennt einen Funktor $G\colon K_1 \longrightarrow K_o$ monadisch (schwach monadisch;

<u>prämonadisch</u>), wenn G einen Linksadjungierten besitzt, derart daß der Vergleichsfunktor K: $K_1 \longrightarrow K_0^t$ (t ist die induzierte Monade) ein Isomorphismus (eine Äquivalenz; treu und voll) ist. Auf prämonadische Funktoren wird in § 10 noch näher eingegangen. Für (schwach) monadische Funktoren hat man folgende Charakterisierung:

(<u>1.8</u>) <u>THEOREM</u> (Beck - Paré, vgl. [6], [49], [52]): G: $K_1 \longrightarrow K_0$ besitze einen Linksadjungierten. Dann ist G genau dann schwach monadisch, wenn K_1 Coegalisatoren G-absoluter Paare besitzt und G sie erhält und reflektiert, und genau dann monadisch, wenn G Coegalisatoren G-absoluter Paare eindeutig erzeugt.

Dabei heißt ein Morphismenpaar $A_1 \overset{f_1}{\underset{g_1}{\rightrightarrows}} B_1$ in K_1 G-<u>absolut</u>, wenn das Paar $(G(f_1),G(g_1))$ einen Coegalisator in K_0 besitzt, der von jedem Funktor mit Bereich K_0 erhalten wird.

Mit Hilfe dieses Kriteriums beweist man beispielsweise leicht die Monadizität des Vergißfunktors einer Kategorie von universellen Algebren nach *Me* oder *Top* (vgl. Kap.V), von *Comp* $\longrightarrow$ *Me* (vgl. [49]), *Cat* $\longrightarrow$ *Graph* , *Auto* (Automaten) $\longrightarrow$ Me^3 (vgl. [54]) oder des Inklusionsfunktors einer vollen, Iso-abgeschlossenen, reflexiven Unterkategorie (vgl. [55], [70]; schwache Monadizität liegt vor, wenn die Unterkategorie nicht Iso-abgeschlossen ist). Oftmals sind für einen Funktor G die Eigenschaft der eindeutigen Erzeugung von Coegalisatoren G-absoluter Paare sowie weitere, für monadische Funktoren typische Eigenschaften erfüllt, die Existenz eines Linksadjungierten jedoch nicht gesichert. Ein Beispiel hierfür ist der Vergißfunktor

$$Mon(K) \longrightarrow [K,K] ,$$

der eindeutig Limites und Coegalisatoren V-absoluter Paare erzeugt. Das

gilt allgemeiner sogar für den Vergißfunktor der Kategorie der Monoide über einer strikt monoidalen Kategorie (vgl. [49]). Ein weiteres Beispiel für einen derartigen Funktor ist für alle $B \in \mathrm{Ob}K$ der Vergißfunktor

$$\langle B,K\rangle \longrightarrow K .$$

Die Existenz eines Linksadjungierten wird hier allerdings bereits durch die Existenz endlicher Coprodukte in K gesichert.

(<u>1.9</u>) Monadische Funktoren erzeugen eindeutig Limites (vgl.z.B.[66]). Ist G: $K_1 \longrightarrow K_0$ schwach monadisch und hat K_1 Coegalisatoren, so ist K_1 $\mathcal{D}$-covollständig, wenn K_0 es ist. Insbesondere ist dann K_1 covollständig, wenn K_0 Coprodukte besitzt. Diese Eigenschaft braucht jedoch nicht wie in [48] und [66] gesondert bewiesen werden, sondern ist eine triviale Folgerung aus dem Satz von Dubuc: vgl.(7.4).

(<u>1.10</u>) Ist t eine Monade über K, so erhält man mit Hilfe des sogenannten vollen Bildes des Linksadjungierten F^t: $K \longrightarrow K^t$ die <u>Kleisli-Kategorie</u> K_t mit dem vergeßlichen Funktor G_t: $K_t \longrightarrow K$, dessen Linksadjungiertem F_t, der Einheit η und der Coeinheit ε_t, die wiederum die Monade t induzieren. F_t ist ein <u>Clone</u>, d.h. bijektiv auf den Objekten. Diese Eigenschaft bestimmt die Adjunktion $(F_t,G_t,\varepsilon_t,\eta)$ eindeutig bis auf Isomorphie (vgl. [51], [58], [66], [67], [70]):

(<u>1.11</u>) <u>PROPOSITION</u>: (F,G,ε,η) und $(F',G',\varepsilon',\eta')$ seien Adjunktionen wie in (1.2), wobei F ein Clone sei. Dann existiert zu einem Morphismus (K_0,τ): $t := (T,\eta,\mu) := R_0(F,G,\varepsilon,\eta) \longrightarrow R_0(F',G',\varepsilon',\eta')$ in Mon_0 genau ein Funktor K_1: $K_1 \longrightarrow K_1'$ mit

(1.11.1) $$F'\circ K_0 = K_1\circ F \quad \text{und} \quad \tau = \gamma\circ F .$$

Dabei ist γ der eindeutig bestimmte Morphismus von Funktoren, derart daß $(K_0,K_1,K_1\,F,\gamma)$: $(F,G,\varepsilon,\eta) \longrightarrow (F',G',\varepsilon',\eta')$ ein Morphismus von

Adjunktionen ist. K_1 ist treu, falls K_o treu und τ punktweise Monomorphismus ist, und K_1 ist voll, falls K_o voll und τ punktweise Retraktion ist.

Ist insbesondere $(K_o,\tau) = (K_o,T)$ die Identität auf t, so ist (1.11.1) gleichwertig mit

$$F' = K_1 \circ F \quad \text{und} \quad G' \circ K_1 = G .$$

Dann gilt $\gamma = G$ und $\varepsilon' \circ K_1 = K_1 \circ \varepsilon$, und K_1 ist treu und voll.

(<u>1.12</u>) Nach (1.11) führt die Kleisli-Konstruktion zu einer vollen, coreflexiven Einbettung

$$E_o\colon \mathit{Mon}_o \longrightarrow \mathit{Adj}_o$$

mit dem Coreflektor R_o, $R_o \circ E_o = \mathit{Mon}_o$ (vgl. [58], [70], [81]). Speziell hat man für jede Kategorie K eine volle, coreflexive Einbettung ${}_K E_o$: $\mathit{Mon}(K) \longrightarrow \mathit{Adj}_o(K)$ mit dem Coreflektor ${}_K R_o$ (vgl. [66]).

(<u>1.13</u>) $\mathbb{M}\mathrm{ON}$ sei die gemeinsame, objektgleiche Unterkategorie von Mon_o und Mon_1, die alle Morphismen (K,τ) enthält, so daß τ die Identität ist. Weiter sei $\mathbb{A}\mathrm{DJ} := \mathit{Adj}_o \cap \mathit{Adj}_1$ in Adj. Durch Einschränkung erhält man dann aus (1.6) und (1.12) adjungierte Funktoren

$$\mathbb{A}\mathrm{DJ} \underset{\mathbb{E}_o}{\overset{\mathbb{R}_o}{\rightleftarrows}} \mathbb{M}\mathrm{ON} \underset{\mathbb{R}_1}{\overset{\mathbb{E}_1}{\rightleftarrows}} \mathbb{A}\mathrm{DJ}$$

d.h. $\mathbb{M}\mathrm{ON}$ läßt sich als volle, reflexive und als volle, coreflexive Unterkategorie von $\mathbb{A}\mathrm{DJ}$ auffassen.

Die volle, Iso-abgeschlossene Hülle des Bildes von $\mathbb{E}_o$ ist die volle Unterkategorie $\mathbb{C}\mathrm{LONE} \subset \mathbb{A}\mathrm{DJ}$, die von den Adjunktionen (F,G,ε,η) erzeugt wird, für die F ein Clone ist. $\mathbb{C}\mathrm{LONE}$ ist äquivalent zu $\mathbb{M}\mathrm{ON}$. Man definiert nun die Beschränkungen $\mathbb{S}\mathrm{EM} := \mathbb{E}_1 \circ \mathbb{R}_o / \mathbb{C}\mathrm{LONE}$ und $\mathbb{S}\mathrm{TR} := \mathbb{C}\mathrm{LONE} \backslash \mathbb{E}_o \circ \mathbb{R}_1$ und erhält unmittelbar das

(<u>1.14</u>) <u>THEOREM</u> (Globale Struktur-Semantik-Adjunktion):

$\mathbb{S}\mathrm{EM}\colon \mathbb{C}\mathrm{LONE} \longrightarrow \mathbb{A}\mathrm{DJ}$ ist ein voller und treuer Rechtsadjungierter zu $\mathbb{S}\mathrm{TR}$.

(<u>1.15</u>) $\mathit{Cat}_{RA} \subset \mathit{Cat}$ sei die objektgleiche Unterkategorie aller rechtsadjungierten Funktoren. Für eine Kategorie K ist die Kommakategorie $<\mathit{Cat}_{RA},K>$ äquivalent zu $\mathit{Adj}_1(K)$. $\mathit{Clone}_{LA} \subset \mathit{Cat}$ sei die objektgleiche Unterkategorie aller linksadjungierten Clones. Für jedes K hat man eine Einbettung $<K,\mathit{Clone}_{LA}> \longrightarrow \mathit{Adj}_o(K)$ und eine Äquivalenz $<K,\mathit{Clone}_{LA}> \sim \mathit{Mon}(K)$. Definiert man nun mit Hilfe des Dualitätsfunktors $\omega\colon \mathit{Mon}(K) \longrightarrow \mathit{Mon}(K)^*$ contravariante (!) Funktoren $\mathrm{Sem}_K := {}_K E_1 \circ \omega \circ {}_K R_o / <K,\mathit{Clone}_{LA}>$ und $\mathrm{Str}_K := <K,\mathit{Clone}_{LA}> \backslash {}_K E_o \circ \omega^{-1} \circ {}_K R_1$, so erhält man das

(<u>1.16</u>) <u>THEOREM</u> (Lokale Struktur-Semantik-Adjunktion):

$\mathrm{Sem}_K\colon <K,\mathit{Clone}_{LA}> \longrightarrow <\mathit{Cat}_{RA},K>$ ist ein voller und treuer Rechtsadjungierter zu Str_K.

Zu (1.14) - (1.16) vergleiche man die Darstellung auf Seite 12.

(<u>1.17</u>) Linton [47], Wyler [83] und andere haben allgemeinere, lokale Struktur-Semantik-Adjunktionen hergestellt, die insbesondere auf die Existenz von Adjungierten der Clones und "Underlying functors" verzichten. Bei Hinzunahme dieser Forderung stimmen ihre Konstruktionen mit obiger (bis auf kanonische Isomorphien) überein. Die Bedeutung der obigen Konstruktion liegt darin, daß sich aus (1.6) und (1.12) sowohl eine globale als auch alle für die Anwendungen wichtigen lokalen Struktur-Semantik-Adjunktionen ergeben. Außerdem erkennt man, daß die Beziehung zwischen Monaden und Adjunktionen in (1.6) wegen der Äquivalenzen $\mathbb{C}\mathrm{LONE} \sim \mathbb{M}\mathrm{ON}$ und $<K,\mathit{Clone}_{LA}> \sim \mathit{Mon}(K)$ im Grunde bereits eine Struktur-Semantik-Adjunktion ist.

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{CLONE} \arrow[d] \arrow[rrrr, shift left, "\mathbb{SEM}"] & & & & \mathbb{ADJ} \arrow[llll, dashed, shift left, "\mathbb{STR}"] \arrow[d, equal] \\
\mathbb{ADJ} \arrow[d, hook] \arrow[rr, shift left, "\mathbb{R}_o"] & & \mathbb{MON} \arrow[ll, dashed, shift left, "\mathbb{E}_o"] \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[rr, shift left, "\mathbb{E}_1"] & & \mathbb{ADJ} \arrow[ll, dashed, shift left, "\mathbb{R}_1"] \arrow[d, hook] \\
Adj_o \arrow[r, shift left, "R_o"] & Mon_o \arrow[l, dashed, shift left, "E_o"] & & Mon_1 \arrow[r, shift left, "E_1"] & Adj_1 \arrow[l, dashed, shift left, "R_1"] \\
Adj_o(K) \arrow[u] \arrow[r, shift left, "K^{R_o}"] & Mon(K) \arrow[l, dashed, shift left, "K^{E_o}"] \arrow[u] \arrow[rr, shift left, "\omega"] & & Mon(K)^* \arrow[ll, dashed, shift left, "\omega^{-1}"] \arrow[u] \arrow[r, shift left, "K^{E_1}"] & Adj_1(K) \arrow[l, dashed, shift left, "K^{R_1}"] \arrow[u] \\
\langle K, Clone_{LA} \rangle \arrow[u] \arrow[rrrr, shift left, "Sem_K"] & & & & \langle Cat_{RA}, K \rangle \arrow[llll, dashed, shift left, "Str_K"] \arrow[u, "S"]
\end{tikzcd}
$$

2. Top - Kategorien

Das Folgende ist im wesentlichen eine Zusammenstellung einiger Ergebnisse von Wyler [82], Wischnewsky [75], [76], [79], Herrlich [33] und Hoffmann [36], die hier mit dem Ziel einer vergleichenden Betrachtung aufgeführt sind.

(2.1) $P: K' \longrightarrow K$ sei ein Funktor.

(1) Für eine kleine Kategorie $\mathcal{D}$ heißt P eine $\mathcal{D}$-initiale Überlagerung (vgl. [60]), wenn für alle Funktoren $F: \mathcal{D} \longrightarrow K'$ der durch P induzierte Funktor der Kommakategorien

$$P_F: \langle \Delta', F \rangle \longrightarrow \langle \Delta, P \circ F \rangle$$

einen vollen und treuen Rechtsadjungierten hat. Das ist offenbar äquivalent damit, daß es zu jedem Kegel $\phi: \Delta(A) \longrightarrow P \circ F$ einen Isomorphismus

j und einen Kegel $\phi': \Delta'(A') \longrightarrow F$ (die sogenannte P-initiale Liftung von ϕ) mit $\phi\Delta(j) = P \circ \phi'$ und der folgenden Eigenschaft gibt:

(2.1.1) Für alle Kegel $\psi': \Delta'(B') \longrightarrow F$ und Morphismen $u: P(B') \longrightarrow P(A')$ mit $(P \circ \phi')\Delta(u) = P \circ \psi'$ gibt es genau ein $u': B' \longrightarrow A'$ mit $P(u') = u$ und $\phi'\Delta'(u') = \psi'$.

Im (zugelassenen) Fall $\mathcal{D} = \emptyset$ werden ϕ und ϕ' allein durch A und A' bestimmt, und (2.1.1) besagt dann, daß es zu jedem $u: P(B') \longrightarrow P(A')$ genau ein $u': B' \longrightarrow A'$ mit $P(u') = u$ gibt.

(2) Im Falle, daß die Coeinheit der durch P_F induzierten Adjunktion als Identität gewählt werden kann, spricht man von einer identitiven $\mathcal{D}$-initialen Überlagerung und identitiven P-initialen Liftungen. Wenn P identitiv Isomorphismen erzeugt, ist eine $\mathcal{D}$-initiale Überlagerung stets identitiv.

(3) Ist P für alle (diskreten) Kategorien $\mathcal{D}$ eine [identitive] $\mathcal{D}$-initiale Überlagerung, so heißt P (diskrete) [identitive] initiale Überlagerung.

(4) Im Falle $\mathcal{D} = \mathbb{1}$ (= einpunktige, diskrete Kategorie) spricht man statt von einer (identitiven) $\mathbb{1}$-initialen Überlagerung von einer (identitiven) Faserung. P ist genau dann eine identitive Faserung, wenn P eine Faserung ist und identitiv Isomorphismen erzeugt.

(5) Ein Kegel $\phi': \Delta'(A') \longrightarrow F$ mit der Eigenschaft (2.1.1) heißt P-initial. Im Falle $\mathcal{D} = \mathbb{1}$ kann ϕ' als Morphismus in K' aufgefaßt werden. Die Klasse aller P-initialen Morphismen in K' bildet eine Unterkategorie $Init_P(K')$ von K', die $Iso(K')$ enthält. $Init_P(K')$ ist (stark) universell, wenn P (verallgemeinerte) Pullbacks erhält. Ist P für eine kleine Kategorie $\mathcal{D}$ $\mathcal{D}$-stetig, so ist $Init_P(K')$ abgeschlossen gegen $\mathcal{D}$-Limites.

(6) Den Begriff der $\mathcal{D}$-initialen Überlagerung kann man dadurch abschwächen, daß man nicht zu allen, sondern nur zu einer Teilklasse $\mathcal{M}$ von Kegeln $\phi \in [\mathcal{D}\, K]$ mit Cobereich $P \circ F$ die Existenz einer (identitiven) P-initialen

Liftung ϕ' verlangt. Man spricht dann von einer (identitiven) $\mathcal{D}$-initialen $\mathcal{M}$-Überlagerung. Häufig wählt man für $\mathcal{M}$ die Klasse der Mono-Kegel ($\phi\Delta(x) = \phi\Delta(y)$ hat $x = y$ zur Folge) und nennt dann P eine $\mathcal{D}$-initiale Mono-Überlagerung. Speziell kann man den Begriff der Faserung dadurch abschwächen, daß man für eine Teilklasse $\mathcal{M} \subset \mathcal{K}$ P eine (identitive) $\mathcal{M}$-Faserung nennt, wenn es zu jedem $f: A \longrightarrow P(B')$ in $\mathcal{M}$ eine (identitive) P-initiale Liftung $f': A' \longrightarrow B'$ gibt.

(7) Im dualen Fall spricht man von finalen Überlagerungen, Cofaserungen und P-finalen Cokegeln und bezeichnet mit $\mathrm{Fin}_P(\mathcal{K}')$ die Unterkategorie der P-finalen Morphismen von $\mathcal{K}'$.

(2.2) $\mathrm{Init}_P(\mathcal{K}')$ und $\mathrm{Fin}_P(\mathcal{K}')$ spielen keineswegs nur bei topologischen Situationen eine Rolle. Zum Beispiel gilt für den Vergißfunktor $G^t: \mathcal{K}^t \longrightarrow \mathcal{K}$ einer Eilenberg-Moore-Kategorie stets $\mathrm{Mono}(\mathcal{K}^t) \subset \mathrm{Init}_{G^t}(\mathcal{K}^t)$ [1] sowie $G^{t\,-1}(\mathcal{E}) \subset \mathrm{Fin}_{G^t}(\mathcal{K}^t)$, wenn $\mathcal{E} \subset \mathcal{K}$ eine Teilklasse mit $T(\mathcal{E}) \subset \mathrm{Epi}(\mathcal{K})$ ist. Derartige Inklusionen sind besonders beim Nachweis von (Co-)Kleinheitsaussagen von Interesse, denn es gilt allgemein:
Ist $F: \mathcal{K}_o \longrightarrow \mathcal{K}_1$ ein Funktor und $\mathcal{M}_i \subset \mathcal{K}_i$, i=0,1, Teilklassen mit $F(\mathcal{M}_o) \subset \mathcal{M}_1$ und $\mathcal{M}_o \subset \mathrm{Init}_F(\mathcal{K}_o)$, so ist $\mathcal{K}_o$ $\mathcal{M}_o$-klein, wenn $\mathcal{K}_1$ $\mathcal{M}_1$-klein ist.

(2.3) LEMMA:

(1) Eine (identitive) $\mathcal{D}$-initiale Mono-Überlagerung erzeugt (identitiv) $\mathcal{D}$-Limites.

(2) Eine $\mathcal{D}$-initiale Überlagerung ist $\mathcal{D}$-stetig.

(3) Ein Funktor ist genau dann eine $\emptyset$-initiale Überlagerung, wenn er einen vollen und treuen Rechtsadjungierten besitzt.

(2.4) THEOREM: Ist $P: \mathcal{K}' \longrightarrow \mathcal{K}$ ein Funktor, so gelten für die Aussagen

[1] Allgemeiner gilt (3.8).

(i) P ist initiale Überlagerung.

(ii) P ist diskrete initiale Überlagerung.

(iii) P ist Produkt-stetig und Faserung.

(iv) P ist Pullback-stetig und hat einen vollen und treuen Rechtsadjungierten.

die Implikationen

$$\begin{tikzcd} (i) \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & (ii) \arrow[d, Rightarrow] \\ (iv) & (iii) \end{tikzcd} .$$

Ist P treu, so gilt (ii) $\Longrightarrow$ (i). Wenn $\mathcal{K}'$ Produkte hat, so gilt (iii) $\Longrightarrow$ (ii), und wenn $\mathcal{K}'$ Pullbacks hat, so (iv) $\Longrightarrow$ (iii).

Beweis: (iii) $\Rightarrow$ (ii) Eine P-initiale Liftung zu dem durch die $m_i: X \longrightarrow P(Y_i')$, $i \in I$, gegebenen Cokegel erhält man durch die P-initiale Liftung zum induzierten Morphismus $m: X \longrightarrow P(\prod_{i \in I} Y_i')$. Im Falle $I = \emptyset$ ist dabei unter $\prod_{i \in I} Y_i'$ ein Endobjekt zu verstehen. (iv) $\Rightarrow$ (iii) Ist J ein voller und treuer Rechtsadjungierter zu P mit der Einheit η und $f: X \longrightarrow P(Y')$ ein Morphismus in $\mathcal{K}$, so ist f' im Pullback

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "b'"'] & Y' \arrow[d, "\eta(Y')"] \\ J(X) \arrow[r, "J(f)"] & J \circ P(Y') \end{tikzcd}$$

eine P-initiale Liftung zu f.

(2.5) Für einen Funktor $P: \mathcal{K}' \longrightarrow \mathcal{K}$ sei

$$J_P := \{(i, X') \in \mathrm{Mor}(P) : i \in \mathrm{Iso}(\mathcal{K})\}$$

und für alle $X \in \mathrm{Ob}\mathcal{K}$ $\langle X, J_P \rangle$ die in (0.3) definierte Kommakategorie. P heißt stark Faser-klein, wenn P J_P-coklein ist. Das ist gleichbedeutend damit, daß für alle $X \in \mathrm{Ob}\mathcal{K}$

$$\{X' \in \mathrm{Ob}\mathcal{K}' : P(X') \cong X\}$$

ein kleines Vertretersystem nicht-isomorpher Objekte enthält. Gilt dies nur für

$$\{X' \in \mathrm{Ob}K' : P(X') = X\} ,$$

so heißt P Faser-klein. Das bedeutet gerade, daß die Fasern

$$P^{-1}(X) = \{f' \in K' : P(f') = X\}$$

ein kleines Skelett besitzen.

(2.6) PROPOSITION: Für $P: K' \longrightarrow K$ gilt:

(1) Ist P eine diskrete initiale Überlagerung, so hat $\langle X, J_P\rangle$ für alle $X \in \mathrm{Ob}K$ Produkte.

(2) Ist P eine Faserung, so ist P genau dann treu, wenn für alle $X \in \mathrm{Ob}K$ $\langle X, J_P\rangle$ eine Ordnungskategorie ist.

(3) Ist P eine diskrete initiale Überlagerung und stark Faser-klein, so ist P treu.

(4) Genau dann ist für alle $X \in \mathrm{Ob}K$ die volle Einbettung

$$P^{-1}(X) \longrightarrow \langle X, J_P\rangle$$

eine Äquivalenz, wenn P identitiv Isomorphismen erzeugt. Ist dies der Fall, so ist P genau dann Faser-klein, wenn P stark Faser-klein ist.

(5) P sei treu und besitze einen vollen und treuen Rechtsadjungierten. Ist dann K' Mono-klein, so ist P stark Faser-klein.

Zu bemerken ist, daß (3) sofort aus (1) und (2) folgt und dabei nicht wie in [33] und [36] benutzt wird, daß die beteiligten Kategorien kleine Hom-Klassen haben.

(2.7) THEOREM: Für einen stark Faser-kleinen Funktor $P: K' \longrightarrow K$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) P ist initiale Überlagerung.

(i)* P ist finale Überlagerung.

(ii) P ist diskrete initiale Überlagerung.

(ii)* P ist diskrete finale Überlagerung.

(iii) P ist Faserung und Cofaserung, und für alle $X \in \mathrm{Ob}K$ ist $\langle X, J_P\rangle$ eine vollständige Ordnungskategorie.

Aus diesen Aussagen folgen die Aussagen

(iv) P ist Faserung und Produkt-stetig.

(iv)* P ist Cofaserung und Coprodukt-costetig.

(v) P hat einen vollen und treuen Rechtsadjungierten und ist stetig.

(v)* P hat einen vollen und treuen Linksadjungierten und ist costetig.

Hat K' (Co-)Produkte, so ist (iv) ((iv)*) äquivalent zu (i)-(iii), und ist K' (co-)vollständig, so ist (v) ((v)*) äquivalent zu (i)-(iii).

(2.8) Ist P stark Faser-klein und erfüllt P die äquivalenten Bedingungen (i)-(iii) aus (2.7), so heißt P topologisch. Erzeugt P außerdem noch identitiv Isomorphismen, so heißt P oder einfach K' Top-Kategorie (über K) oder auch Initialstrukturfunktor. Im folgenden werden im Hinblick auf die Beispiele meistens der Einfachheit halber Top-Kategorien betrachtet, obwohl die Betrachtung eines topologischen Funktors genügen würde.

(2.9) Eine Top-Kategorie $P: K' \longrightarrow K$ erzeugt identitiv Limites und Colimites, besitzt einen Rechtsinvers-Rechtsadjungierten und einen Rechtsinvers-Linksadjungierten. K' ist (co-)vollständig genau dann, wenn K es ist, und K' hat genau dann eine (Co-)Generatorenmenge, wenn K eine hat. K' ist genau dann Mono-klein (Epi-coklein), wenn K es ist; ist K für $M \subset \mathrm{Mono}(K)$ $(E \subset \mathrm{Epi}(K))$ M-klein (E-coklein), so ist K' $P^{-1}(M)$-klein

($P^{-1}(E)$-coklein). Die Fasern liefern vollständige und covollständige Ordnungskategorien mit kleinem Skelett.

Diese letzte Bemerkung gibt Anlaß zu einer anderen Beschreibung von Top-kategorien:

(2.10) Eine treue, Faser-kleine, identitive Faserung (Top-Kategorie) induziert einen contravarianten Funktor

$$P^*: K \longrightarrow \mathit{Ord} \quad (\mathit{Ord}_{inf}) .$$

Dabei sei Ord (Ord_{inf}) die Kategorie der geordneten Mengen (mit beliebigen Infima und Suprema), deren Morphismen ordnungstreue (Infima-erhaltende) Abbildungen sind.

P^* ordnet jedem $X \in \mathrm{Ob}K$ die Objektmenge eines Skeletts der Faser $P^{-1}(X)$ zu, die nach (2.6) mit einer Ordnung versehen ist. Ist $f: X \longrightarrow Y$ in K, $Y' \in P^*(Y)$ und $f': X' \longrightarrow Y'$ eine identitive P-initiale Liftung von f, so sei $P^*(f)(Y') \in P^*(X)$ das einzige zu X' in $P^{-1}(X)$ isomorphe Objekt. Offenbar ist dann $P^*(f): P^*(Y) \longrightarrow P^*(X)$ eine ordnungstreue (Infima-erhaltende) Abbildung und P^* ein contravarianter Funktor.

Umgekehrt bildet man zu einem contravarianten Funktor $T: K \longrightarrow \mathit{Ord}$ (Ord_{inf}) die Kategorie K^T der "T-Räume" über K: Objekte sind Paare (X,u) mit $X \in \mathrm{Ob}K$ und $u \in T(X)$. Einem K^T-Morphismus $\tilde{f}: (X,u) \longrightarrow (Y,v)$ liegt ein K-Morphismus $f: X \longrightarrow Y$ mit $u \leq T(f)(v)$ zugrunde. Der treue Vergißfunktor $P^T: K^T \longrightarrow K$ ist eine Faser-kleine, identitive Faserung (Top-Kategorie). Ein Morphismus $\tilde{f}: (X,u) \longrightarrow (Y,v)$ (Eine Morphismenfamilie $\tilde{f}_i: (X,u) \longrightarrow (Y_i,v_i)$, $i \in I$, aufgefaßt als diskreter Cokegel) ist genau dann P^T-initial, wenn $u = T(f)(v)$ ($u = \inf_{i \in I} T(f_i)(v_i)$) gilt.

Die Zuordnungen $P \longmapsto P^*$ und $T \longmapsto P^T$ liefern Äquivalenzen, die zueinander adjungiert sind. Um das nachzuprüfen, hat man in geeigneter

Morphismen zwischen Faserungen und Top-Kategorien einzuführen. Zuvor definiert man hierzu allgemeiner:

(2.11) $G: K_1 \longrightarrow K_o$ und $K_i: K_i \longrightarrow L_i$, $i=0,1$, seien Funktoren. Ist dann $\mathcal{D}$ eine kleine Kategorie, so heißt G $\mathcal{D}$-initial stetig bzgl. K_1, K_o, wenn für jeden K_1-initialen Kegel $\phi_1 \in [\mathcal{D},K_1]$ $G \cdot \phi_1$ ein K_o-initialer Kegel ist. Gilt das für alle kleinen (diskreten) $\mathcal{D}$, so heißt G (diskret) initial stetig bzgl. K_1, K_o. Im Falle K_1 treu ist jeder diskret initial stetige Funktor initial stetig. Duale Sprechweise: final costetig.

Initial stetige Funktoren spielen bei Liftungsproblemen eine wichtige Rolle (vgl. § 14). An dieser Stelle sei nur bemerkt:

(2.12) LEMMA: Hat man ein kommutatives Quadrat von Funktoren

(2.12.1)
$$\begin{tikzcd} K'_1 \arrow[r, "G'"] \arrow[d, "P_1"'] & K'_o \arrow[d, "P_o"] \\ K_1 \arrow[r, "G"] & K_o \end{tikzcd}$$

wobei P_1 und P_o treue, Faser-kleine, identitive Faserungen (Top-Kategorien) sind, so erhält man für jedes $X_1 \in \mathrm{Ob}K_1$ ordnungstreue Strukturabbildungen

$$\gamma(X_1): P^*_1(X_1) \longrightarrow P^*_o(G(X_1)) ,$$

so daß für alle $f_1: X_1 \longrightarrow Y_1$ in K_1 und $Y'_1 \in P^*_1(Y_1)$ die Ungleichung

(2.12.2) $$\gamma(X_1)P^*_1(f_1)\ (Y'_1) \leq P^*_o(G(f_1))\gamma(Y_1)\ (Y'_1)$$

erfüllt ist. Die Strukturabbildungen induzieren genau dann einen Morphismus von Funktoren $\gamma: P^*_1 \longrightarrow P^*_o \cdot G$, d.h. in (2.12.2) gilt "=" (und die Strukturabbildungen erhalten Infima), wenn G' $\mathbf{1}$-initial stetig (initial stetig) bzgl. P_1, P_o ist.

Zum Beweis definiert man $\gamma(X_1)(X_1')$ für jedes $X_1' \in P_1^*(X_1)$ als das zu $G'(X_1')$ isomorphe Objekt in $P_o^*(G(X_1))$. Wir nehmen die im folgenden auftretenden Faserungen(Top-Kategorien) als <u>reduziert</u> an, d.h. $P^*(X)=\mathrm{Ob}(P^{-1}(X))$.

(<u>2.13</u>) Unter geeigneten mengentheoretischen Voraussetzungen bildet man die Kategorie *Fas* (TopCat_{init}), deren Objekte treue, Faser-kleine, identitive Faserungen (Top-Kategorien) sind und deren Morphismen durch kommutative Diagramme (2.12.1) geliefert werden, derart daß G' 1-initial stetig (initial stetig) ist.

Die Objekte der Kategorie $\mathrm{Diag}_1(\mathit{Ord})$ $(\mathrm{Diag}_1(\mathit{Ord}_{inf}))$ [1] sind contravariante Funktoren $T\colon K \longrightarrow \mathit{Ord}$ (Ord_{inf}), und Morphismen sind "schwach kommutative" Diagramme des Typs

(2.13.1)
$$\begin{tikzcd} K_1 \arrow[rr, "G"] \arrow[dr, "T_1"'] & \arrow[d, phantom, "\gamma"] & K_o \arrow[dl, "T_o"] \\ & \mathit{Ord}_{(inf)} & \end{tikzcd}$$

Durch "funktorielle Erweiterung" der in (2.10) beschriebenen Zuordnung zeigt man dann:

(<u>2.14</u>) <u>THEOREM</u> : Die Kategorien *Fas* und $\mathrm{Diag}_1(\mathit{Ord})$ sowie TopCat_{init} und $\mathrm{Diag}_1(\mathit{Ord}_{inf})$ sind äquivalent.

Dual erhält man hieraus die Äquivalenzen $\mathit{CoFas} \sim \mathrm{Diag}_o(\mathit{Ord})$ sowie $\mathit{TopCat}_{fin} \sim \mathrm{Diag}_o(\mathit{Ord}_{sup})$ (bei offensichtlicher Bedeutung dieser Bezeichnungsweise), denn es gelten die Isomorphien $\mathit{Fas} \cong \mathit{CoFas}$ [2], $\mathit{TopCat}_{init} \cong \mathit{TopCat}_{fin}$, $\mathit{Ord}_{inf} \cong \mathit{Ord}_{sup}$, $\mathrm{Diag}_1(\mathit{Ord}_{(inf)}) \cong \mathrm{Diag}_o(\mathit{Ord}_{(sup)})$. Aus der Vollständigkeit von *Ord* und Ord_{inf} kann man insbesondere auf die Vollständigkeit aller obengenannten Kategorien schließen.

---
[1] Die Bezeichnungsweise lehnt sich unmittelbar an [60] an.

[2] Diese Isomorphie bedeutet nicht, daß der Begriff der treuen, Faser-kleinen, identitiven Faserung wie der der Top-Kategorie selbstdual ist.

Ehe wir noch einige Standardbeispiele zusammenstellen, soll die Frage beantwortet werden, ob sich die hier beschriebenen Typen von Funktoren in irgendeiner Weise "algebraisch" verhalten. Sieht man die Reflektion von Isomorphismen als typisch algebraisch an, so ist sie zu verneinen, dem es gilt:

(<u>2.15</u>) <u>PROPOSITION</u>: Ein Funktor, der einen treuen und vollen Links- oder Rechtsadjungierten besitzt, ist genau dann eine Äquivalenz, wenn er Isomorphismen reflektiert.

(<u>2.16</u>) <u>KOROLLAR</u>: K' besitze ein Endobjekt, das durch die Faserung $P\colon K' \longrightarrow K$ erhalten werde. Dann ist P genau dann eine Äquivalenz, wenn P Isomorphismen reflektiert.

Der Beweis folgt aus (2.15) unter Beachtung des Beweises von (2.4)(iii) $\Rightarrow$ (ii) im Spezialfall leerer Produkte.

Die Voraussetzung über das Endobjekt in (2.16) ist wesentlich: Für jedes $f\colon A \longrightarrow B$ in einer Kategorie K ist $\langle K,f\rangle\colon \langle K,A\rangle \longrightarrow \langle K,B\rangle$ eine treue, identitive, Isomorphismen reflektierende Faserung (und im Falle $f \in \mathrm{Mono}(K)$ sogar voll), jedoch im allgemeinen keine Äquivalenz. Grund: Zwar besitzt $\langle K,A\rangle$ stets ein Endobjekt, das aber nur im Falle $f \in \mathrm{Iso}(K)$ durch $\langle K,f\rangle$ erhalten wird.

(<u>2.17</u>) Ist P ein treuer Funktor mit $\mathrm{Mono}(K') \subset \mathrm{Init}_P(K')$ oder $\mathrm{Epi}(K') \subset \mathrm{Fin}_P(K')$, so reflektiert P Isomorphismen. Das folgt unmittelbar aus der für jeden Funktor P gültigen Gleichung

$$P^{-1}(\mathrm{Iso}(K)) \cap \mathrm{Init}_P(K') = \mathrm{Iso}(K') = P^{-1}(\mathrm{Iso}(K)) \cap \mathrm{Fin}_P(K').$$

"Mono(K') $\subset$ Init$_p(K')$" bzw. dual "Epi(K') $\subset$ Fin$_p(K')$ ist also eine typisch algebraische Eigenschaft (vgl.(2.2));in topologischen Situationen gilt im allgemeinen nur Ext-Mono(K') $\subset$ Init$_p(K')$ bzw. Ext-Epi(K') $\subset$ Fin$_p(K')$ (vgl.(3.9)).

(2.18) BEISPIELE: Top-Kategorien über der Kategorie $\mathcal{Me}$ der Mengen sind $\mathcal{Top}$ (topologische Räume), $\mathcal{Unif}$ (uniforme Räume), $\mathcal{Prox}$ (Proximity-Räume), $\mathcal{Lim}$ (Limes-Räume), $\mathcal{Near}$ (vgl. [34]), meßbare Räume, Borel-Räume, Dynkin-Systeme. Diese Kategorien können geliftet werden zu Top-Kategorien über jeder monadischen Kategorie über $\mathcal{Me}$ (vgl.§ 14). Beispiele für identitive Mono-Faserungen sind die Vergißfunktoren $\mathcal{Ord} \longrightarrow \mathcal{Me}$ und $\mathcal{Met} \longrightarrow \mathcal{Me}$. Dabei ist $\mathcal{Met}$ die Kategorie der metrischen Räume, als deren Morphismen man hier stetige, gleichmäßig stetige, kontrahierende oder isometrische Abbildungen wählen kann.

II. RELATIVE BILDZERLEGUNGEN

3. Unterobjekte und Quotienten relativ zu einem Funktor

(3.1) DEFINITION: Für eine Teilklasse $M_1 \subset K_1$ sei $Q_G(M_1)$ die Klasse aller Paare $(e_o,A_1) \in \mathrm{Mor}(G)$, für die für alle $m_1\colon B_1 \longrightarrow C_1$ in M_1 gilt:

Für alle $(f_o,B_1) \in \mathrm{Mor}(G)$ und $f_1\colon A_1 \longrightarrow C_1$ in K_1 mit $G(f_1)e_o =$

(3.1.1) $G(m_1)f_o$ gibt es genau ein $t_1 \in K_1$ mit $G(t_1)e_o = f_o$ und $m_1t_1 = f_1$.

$$\begin{tikzcd} A_o \arrow[r, "e_o"] \arrow[d, "f_o"'] & G(A_1) \arrow[d, "G(f_1)"] \arrow[dl, dashed, "G(t_1)"] \\ G(B_1) \arrow[r, "G(m_1)"'] & G(C_1) \end{tikzcd}$$

Die Elemente in $Q_G(M_1)$ heißen M_1-Quotienten relativ G und diejenigen in

$$Q^o_G(M_1) \;:=\; Q_G(M_1) \cap \mathrm{Epi}(G)$$

epimorphe M_1-Quotienten relativ G.

Umgekehrt definiert man für eine Teilklasse $E_o \subset \mathrm{Mor}(G)$ die Klasse $U_G(E_o)$ aller $m_1\colon B_1 \longrightarrow C_1$ in M_1, für die für alle $(e_o,A_1) \in E_o$ die Eigenschaft (3.1.1) gilt. Die Elemente in $U_G(E_o)$ heißen E_o-Unterobjekte relativ G und diejenigen in

$$U^o_G(E_o) \;:=\; U_G(E_o) \cap \mathrm{Mono}(K_1)$$

monomorphe E_o-Unterobjekte relativ G.

Wegen der unmittelbar einsichtigen Inklusionen

$$E_o \subset Q_G(U_G(E_o)) \quad \text{und} \quad M_1 \subset U_G(Q_G(M_1))$$

definieren die ordnungsumkehrenden Operatoren U_G und Q_G eine Galois-korrespondenz zwischen den Teilklassen von Mor(G) und denen von K_1

und bei entsprechender Einschränkung zwischen den Teilklassen von Epi(G) und Mono(K_1). Für Bildzerlegungen erweisen sich die bezüglich dieser Galoiskorrespondenz abgeschlossenen Teilklassen als besonders wichtig: siehe (3.11). Ist G der identische Funktor auf einer Kategorie, so liegt die bekannte Isbell'sche Galoiskorrespondenz vor (vgl. [59]). In diesem Fall sind die Definitionen von M_1-Quotienten und E_o-Unterobjekten dual zueinander. Im allgemeinen Fall führt die Dualisierung auf die Betrachtung von Morphismen $G(A_1) \xrightarrow{f_o} A_o$. Wählt man für G nun speziell den kanonischen Einbettungsfunktor

$$\Delta : K \longrightarrow [\mathcal{D},K]$$

in die Funktorkategorie $[\mathcal{D},K]$, so werden durch (3.1) die von Herrlich in [32] und [33] benutzten Zerlegungen von Morphismenbündeln erfaßt. Aber auch ohne zu dualisieren ist der Fall G = Δ interessant, nämlich zur Konstruktion von Colimites in einer Kategorie: vgl. § 7.

Zu bemerken ist noch, daß man natürlich wie in [62] zunächst auf die Forderung nach der Eindeutigkeit der Diagonalen in (3.1.1) verzichten kann. Diese ergibt sich jedoch fast immer von selbst, weil entweder $Q_G(M_1) = Q_G^o(M_1)$ oder $M_1 \subset \mathrm{Mono}(K_1)$ ist oder oder das folgende, auf Lemma 6 in [62] zurückgehende Kriterium erfüllt ist: Hat K_1 M_1-Urbilder, die von G (als Pullbacks) erhalten werden und folgt aus $m_1 f_1 = 1$ mit $m_1 \in M_1$ stets $f_1 \in M_1$, so gehört jedes $(e_o, A_1) \in \mathrm{Mor}(G)$, das (3.1.1) ohne die Eindeutigkeitsforderung erfüllt, schon zu $Q_G(K_1)$. Außerdem gewährleistet die Eindeutigkeitsforderung einige zusätzliche Verträglichkeitseigenschaften, die im Falle $G = K_1 = K_o$ wohlbekannt sind und daher hier ohne Beweis zusammengestellt seien:

(3.2) PROPOSITION: Für eine Teilklasse $E_o \subset \mathrm{Mor}(G)$ gilt:

(1) $U_G(E_o)$ ist eine Unterkategorie von K_1 mit $\mathrm{Iso}(K_1) \subset U_G(E_o)$; im Falle $\{(G(A_1),A_1): A_1 \in \mathrm{Ob}\, K_1\} \subset E_o$ ist $U_G(E_o) \subset \mathrm{Init}_G(K_1)$.

(2) Ist $m_1 \in \mathrm{Mono}(K_1)$ oder $m_1 \in U_G(E_o)$ oder $E_o \subset \mathrm{Epi}(G)$, so folgt aus $m_1 n_1 \in U_G(E_o)$ auch $n_1 \in U_G(E_o)$.

(3) Erhält G Monomorphismen und ist $E_o \subset \mathrm{Epi}(G)$, so ist $\mathrm{Reg\text{-}Mono}(K_1) \subset U_G(E_o)$.

(4) Erhält G (verallgemeinerte) Pullbacks, so ist $U_G(E_o)$ (stark) universell.

(5) Erhält G für eine kleine Kategorie $\mathcal{D}$ $\mathcal{D}$-Limites, so ist $U_G(E_o)$ abgeschlossen gegen $\mathcal{D}$-Limites.

(6) Besitzt G einen Linksadjungierten F, so gilt für jeden Funktor H: $K_2 \longrightarrow K_1$ mit Linksadjungiertem L die Inklusion

$$U_{K_2}(L{\circ}F(E_o)) \cap H^{-1}(\mathrm{Init}_G(K_1)) \subset H^{-1}(U_G(E_o)) ;$$

ist G voll und treu, so gilt $H^{-1}(U_G(E_o)) = U_{K_2}(L{\circ}F(E_o))$;dabei ist

$$L{\circ}F(E_o) := \{L(F(e_o)): \text{Es gibt ein } A_1 \text{ mit } (e_o,A_1) \in E_o\} .$$

Alle Aussagen bleiben richtig, wenn man U durch U^o ersetzt.

Für die Teilklassen $Q_G(M_1)$ gelten zum Teil analoge Eigenschaften. Zu ihrer Formulierung benutzen wir das Komplexprodukt für Teilklassen einer Kategorie auch für Teilklassen von Mor(G). So sei für $E_o \subset \mathrm{Mor}(G)$, $X_o \subset K_o$ und $X_1 \subset K_1$

$$G(X_1)\cdot E_o := \{(G(x_1)e_o,B_1): e_o:A_o \longrightarrow G(A_1) \text{ in } E_o,\ x_1:A_1 \longrightarrow B_1 \text{ in } X_1\}$$

$$E_o\cdot X_o := \{(e_o x_o,B_1): x_o:A_o \longrightarrow B_o \text{ in } X_o,\ e_o:B_o \longrightarrow G(B_1) \text{ in } E_o\}.$$

(3.3) PROPOSITION: Für eine Teilklasse $M_1 \subset K_1$ gilt:

(1) $G(Q_{K_1}(M_1))\cdot Q_G(M_1)\cdot Q_{K_o}(G(M_1)) \subset Q_G(M_1)$; im Falle $M_1 \subset \mathrm{Init}_G(K_1)$ ist

$$\{(i_o,A_1) \in \mathrm{Mor}(G): i_o \in \mathrm{Iso}(K_o)\} \subset Q_G(M_1).$$

(2) Ist $e_o \in \mathrm{Epi}(K_o)$ oder $e_o \in Q_{K_o}(G(M_1))$ oder $G(M_1) \subset \mathrm{Mono}(K_o)$, so folgt für alle $(f_o,A_1) \in \mathrm{Mor}(G)$ aus $(f_o e_o,A_1) \in Q_G(M_1)$ auch $(f_o,A_1) \in Q_G(M_1)$.

(3) Ist $(f_o,A_1)\in \mathrm{Epi}(G)$ oder $(f_o,A_1)\in Q_G(M_1)$ oder $M_1\subset \mathrm{Mono}(K_1)$, so folgt für alle $e_1: A_1 \longrightarrow B_1$ in K_1 aus $(G(e_1)f_o,B_1)\in Q_G(M_1)$ schon $e_1\in Q_{K_1}(M_1)$.

(4) Hat K_1 Egalisatoren, die von G erhalten werden, und enthält M_1 alle Egalisatoren von K_1, so ist $Q_G(M_1) = Q^o_G(M_1)$.

Bis auf die Zusatzaussage in (1) bleiben alle Aussagen richtig, wenn man Q durch Q^o ersetzt.

Es wird jetzt noch eine weitere Galoiskorrespondenz definiert, die sich beim Nachweis von Existenzsätzen als wichtig erweist.

(3.4) DEFINITION: Für $M_1\subset K_1$ sei ${}^{loc}Q_G(M_1)$ die Klasse aller $(e_o,A_1)\in \mathrm{Mor}(G)$, für die für alle $m_1: B_1 \longrightarrow A_1$ in M_1 die Eigenschaft (3.1.1) für $f_1 = A_1 = C_1$ gilt, d.h. zu einer Faktorisierung

$$\begin{tikzcd} & G(B_1) \arrow[dr, "G(m_1)"] & \\ A_o \arrow[ur, "f_o"] \arrow[rr, "e_o"'] & & G(A_1) \end{tikzcd}$$

gibt es genau ein $t_1\in K_1$ mit $m_1t_1 = A_1$ und $G(t_1)e_o = f_o$ (im Falle $M_1\subset \mathrm{Mono}(K_1)$ ist das mit $m_1\in \mathrm{Iso}(K_1)$ gleichbedeutend). Die Elemente in ${}^{loc}Q_G(M_1)$ heißen lokale M_1-Quotienten relativ G und diejenigen in

$${}^{loc}Q^o_G(M_1) := {}^{loc}Q_G(M_1)\cap \mathrm{Epi}(G)$$

lokale epimorphe M_1-Quotienten relativ G.[1]

Umgekehrt definiert man für eine Teilklasse $E_o\subset \mathrm{Mor}(G)$ die Klasse ${}^{loc}U_G(E_o)$ aller $m_1:B_1 \longrightarrow A_1$ in K_1, für die für alle $(e_o,A_1)\in E_o$ die Eigenschaft (3.1.1) für $f_1 = A_1 = C_1$ gilt und setzt dann

$${}^{loc}U^o_G(E_o) := {}^{loc}U_G(E_o)\cap \mathrm{Mono}(K_1).$$

Man spricht dann von lokalen (monomorphen) E_o-Unterobjekten relativ G.

[1] Im Falle $M_1\subset \mathrm{Mono}(K_1)$ stimmt ${}^{loc}Q^o_G(M_1)$ mit $\mathrm{Ext}_{M_1}\text{-}\mathrm{Epi}_G(K_o)$ aus [61] überein.

Trivialerweise gelten die Inklusionen

$$Q_G(M_1)\subset {}^{loc}Q_G(M_1) \quad\text{und}\quad U_G(E_o)\subset {}^{loc}U_G(E_o) .$$

Für ${}^{loc}U_G(E_o)$ gelten nicht mehr so viele Verträglichkeitseigenschaften wie für $U_G(E_o)$, jedoch stimmen beide Klassen in vielen Fällen überein. Entsprechendes gilt für ${}^{loc}Q_G(M_1)$ und $Q_G(M_1)$.

(3.5) PROPOSITION: Für eine Teilklasse $E_o\subset \mathrm{Mor}(G)$ gilt:

(1) ${}^{loc}U_G(E_o)\cdot \mathrm{Iso}(K_1)\subset {}^{loc}U_G(E_o)$; im Falle $G(\mathrm{Iso}(K_1))\cdot E_o\subset E_o$ gilt auch $\mathrm{Iso}(K_1)\cdot {}^{loc}U_G(E_o)\subset {}^{loc}U_G(E_o)$.

(2) ${}^{loc}U_G(E_o)$ ist abgeschlossen gegen (verallgemeinerte) Pullbacks, sofern G (verallgemeinerte) Pullbacks erhält.

(3) Hat K_1 ${}^{loc}U_G(E_o)$-Urbilder, die von G (als Pullbacks) erhalten werden, so ist ${}^{loc}U_G(E_o) = U_G(E_o)$.

(3.6) PROPOSITION: Für eine Teilklasse $M_1\subset K_1$ gilt:

(1) ${}^{loc}Q_G(M_1)\cdot \mathrm{Iso}(K_o)\subset {}^{loc}Q_G(M_1)$; im Falle $\mathrm{Iso}(K_1)\cdot M_1\subset M_1$ gilt auch $G(\mathrm{Iso}(K_1))\cdot {}^{loc}Q_G(M_1)\subset {}^{loc}Q_G(M_1)$.

(2) Ist $e_o\in \mathrm{Epi}(K_o)$ oder $G(M_1)\subset \mathrm{Mono}(K_1)$, so folgt für alle $(f_o,A_1)\in \mathrm{Mor}(G)$ aus $(f_oe_o,A_1)\in {}^{loc}Q_G(M_1)$ auch $(f_o,A_1)\in {}^{loc}Q_G(M_1)$.

(3) Ist $(f_o,A_1)\in \mathrm{Epi}(G)$ oder $M_1\subset \mathrm{Mono}(K_1)$, so folgt für alle $e_1: A_1\longrightarrow B_1$ in K_1 aus $(G(e_1)f_o,B_1)\in {}^{loc}Q_G(M_1)$ schon $e_1\in {}^{loc}Q_{K_1}(M_1)$.

(4) Hat K_1 Egalisatoren, die von G erhalten werden, und enthält M_1 alle Egalisatoren von K_1, so ist ${}^{loc}Q_G(M_1) = {}^{loc}Q^o_G(M_1)$.

(5) Im Falle $M_1\subset \text{Ext-Mono}(K_1)$ ist ${}^{loc}Q^o_G(M_1) = \mathrm{Epi}(G)$.

(6) Hat K_1 M_1-Urbilder, die von G (als Pullbacks) erhalten werden, so ist ${}^{loc}Q_G(M_1) = Q_G(M_1)$.

In (3.5) und (3.6) kann man wieder überall U bzw. Q durch U^o bzw. Q^o ersetzen.

Die in (3.1) und (3.4) eingeführten Teilklassen werden nun im Zusammenhang mit Bildzerlegungen relativ zu einem Funktor behandelt. Verlangt man von solchen Zerlegungen ein "kanonisches", d.h. eindeutiges Verhalten, so stimmen die auftretenden "Zerlegungsklassen" gerade mit den obigen überein. Dazu benötigen wir folgende Bezeichnungsweisen:

(<u>3.7</u>) <u>DEFINITION</u>: Es seien $E_o \subset \mathrm{Mor}(G)$ und $M_1 \subset K_1$.

(1) G heißt (E_o,M_1)-<u>zerlegbar</u>, wenn es zu jedem $f_o\colon A_o \longrightarrow G(A_1)$ in K_o ein $e_o\colon A_o \longrightarrow G(B_1)$ in E_o und ein $m_1\colon B_1 \longrightarrow A_1$ in M_1 mit $f_o = G(m_1)e_o$ gibt.

(2) (E_o,M_1) heißt <u>Isbell-Zerlegungspaar von</u> G, wenn für alle $e_o\colon A_o \longrightarrow G(A_1)$ in E_o und $m_1\colon B_1 \longrightarrow C_1$ in M_1 die Eigenschaft (3.1.1) gilt.

Im folgenden wird die Bedingung $M_1 \subset \mathrm{Init}_G(K_1)$, die im Falle $G = K_1 = K_o$ natürlich stets erfüllt ist, eine wichtige Rolle spielen. Ihre Bedeutung wird daher zunächst analysiert.

(<u>3.8</u>) <u>PROPOSITION</u>: Für $M_1 \subset K_1$ sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) $\{(i_o,A_1) \in \mathrm{Mor}(G)\colon i_o \in \mathrm{Iso}(K_o)\} \subset Q_G(M_1)$.

(ii) $\{(G(A_1),A_1)\colon A_1 \in \mathrm{Ob}K_1\} \subset Q_G(M_1)$.

(iii) $M_1 \subset \mathrm{Init}_G(K_1)$.

Besitzt G einen Linksadjungierten F mit der Adjunktionscoeinheit ε, so ist zu (i) - (iii) außerdem äquivalent:

(iv) ε gehört punktweise zu $Q_{K_1}(M_1)$.

Beweis: Die Äquivalenz von (i) - (iii) entnimmt man aus (3.2)(1) und (3.3)(1). Zum Beweis von (iv) $\Longrightarrow$ (iii) sei für $m_1 \in M_1$ die Gleichung $G(m_1)g_o = G(f_1)$ gegeben. Für g_1 mit $G(g_1)\eta(G(C_1)) = g_o$ gilt dann

$m_1g_1 = f_1\varepsilon(C_1)$ (η Adjunktionseinheit), so daß ein t_1 mit $m_1t_1 = f_1$ und $t_1\varepsilon(C_1) = g_1$ existiert, für das auch $g_o = G(t_1)$ gilt.

$$\begin{tikzcd}
G\circ F\circ G(C_1) \arrow[d, "G(g_1)"'] \arrow[r, shift right, "G(\varepsilon(C_1))"'] & G(C_1) \arrow[l, shift right, "\eta(G(C_1))"'] \arrow[d, "G(f_1)"] \arrow[dl, "g_o=G(t_1)"] \\
G(A_1) \arrow[r, "G(m_1)"'] & G(B_1)
\end{tikzcd}$$

Hat man umgekehrt die Gleichung $m_1g_1 = f_1\varepsilon(C_1)$ mit $m_1 \in M_1$, so gibt es zu $g_o := G(g_1)\eta(G(C_1))$ ein t_1 mit $m_1t_1 = f_1$ und $G(t_1) = g_o$, das auch $t_1\varepsilon(C_1) = f_1$ erfüllt, so daß (iii) $\Longrightarrow$ (iv) gezeigt ist.

Indem man (iv) $\Longrightarrow$ (iii) für $M_1 := U_{K_1}(\mathrm{Epi}(K_1))$ anwendet, erhält man unter Beachtung von (3.2)(6) das sowohl für topologische wie auch für algebraische Anwendungen wichtige

(<u>3.9</u>) <u>KOROLLAR</u>: Ist $G\colon K_1 \longrightarrow K_o$ ein treuer Funktor mit Linksadjungiertem, so ist $U_{K_1}(\mathrm{Epi}(K_1)) \subset G^{-1}(U_{K_o}(\mathrm{Epi}(K_o)) \cap \mathrm{Init}_G(K_1)$. Erhält G außerdem Epimorphismen, so gilt sogar "=".

Natürlich gilt (3.9) ebenfalls mit U^o anstelle von U. Insbesondere ist für eine Top-Kategorie $P\colon K' \longrightarrow K$

$$U^o_{K'}(\mathrm{Epi}(K')) = P^{-1}(U^o_K(\mathrm{Epi}(K)) \cap \mathrm{Init}_P(K').$$

Falls K monomorphe Epi-Bilder hat, stimmt diese Gleichung mit der von Wyler [82] nachgewiesenen überein:

$$\text{Ext-Mono}(K') = P^{-1}(\text{Ext-Mono}(K)) \cap \mathrm{Init}_P(K').$$

(Vgl. auch die dualen Aussagen von (9.5).) Aus (3.9) folgt in Verbindung mit der zu (3.6)(6) dualen Aussage noch eine Umkehrung zu (2.17):

(<u>3.10</u>) <u>KOROLLAR</u>: $G\colon K_1 \longrightarrow K_o$ sei ein treuer, Epimorphismen erhaltender

Funktor mit Linksadjungiertem. K_1 habe Pushouts und K_o sei ausgeglichen. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) $\mathrm{Mono}(K_1) \subset \mathrm{Init}_G(K_1)$.

(ii) G reflektiert Isomorphismen.

(iii) K_1 ist ausgeglichen.

(<u>3.11</u>) <u>THEOREM</u>: $G\colon K_1 \longrightarrow K_o$ sei für $E_o \subset \mathrm{Mor}(G)$ mit $G(\mathrm{Iso}(K_1))\cdot E_o \subset E_o$ und $M_1 \subset K_1$ mit $M_1 \cdot \mathrm{Iso}\,(K_1) \subset M_1$ (E_o,M_1)-zerlegbar. Dann gelten für die Aussagen

(i) (E_o,M_1) ist ein Isbell-Zerlegungspaar.

(ii) $E_o = Q_G(M_1)$.

(iii) $M_1 = U_G(E_o)$.

die Implikationen (iii) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longleftrightarrow$ (i) .

Im Falle $M_1 \subset \mathrm{Init}_G(K_1)$ sind alle drei Aussagen äquivalent.

Beweis: Für den ersten Teil der Aussage ist nur zu zeigen, daß (i) $Q_G(M_1) \subset E_o$ zur Folge hat. Dazu betrachtet man eine (E_o,M_1)-Zerlegung $q_o = G(m_1)e_o$ von $(q_o,A_1) \in Q_G(M_1)$ und erhält ein t_1 mit $m_1t_1 = A_1$ und $G(t_1)q_o = e_o$.

Aus dem Diagramm

$$\begin{tikzcd} A_o \arrow[r, "e_o"] \arrow[d, "e_o"'] & G(B_1) \arrow[d, "G(m_1)"] \arrow[dl, Rightarrow, "G(t_1m_1)"', "G(B_1)"] \\ G(B_1) \arrow[r, "G(m_1)"'] & G(A_1) \end{tikzcd}$$

entnimmt man dann die Gleichung $t_1m_1 = B_1$ und mit $G(\mathrm{Iso}(K_1))\cdot E_o \subset E_o$ die Behauptung.

Für den zweiten Teil ist aus (i) und $M_1 \subset \mathrm{Init}_G(K_1)$ die Inklusion $U_G(E_o) \subset M_1$ zu folgern. Man betrachtet wieder eine (E_o,M_1)-Zerlegung $G(u_1) = G(m_1)e_o$ von $(G(u_1),A_1)$ für ein $u_1\colon C_1 \longrightarrow A_1$ in $U_G(E_o)$ und erhält ein

t_1 mit $u_1t_1 = m_1$ und $G(t_1)e_o = G(C_1)$ und ein e_1 mit $m_1e_1 = u_1$ und $G(e_1) = e_o$. Aus den Diagrammen

$$\begin{tikzcd} G(C_1) \arrow[r, "e_o"] \arrow[d, "e_o"'] & G(B_1) \arrow[d, "G(m_1)"] \arrow[dl, Rightarrow, "G(e_1t_1)"', "G(B_1)"] \\ G(B_1) \arrow[r, "G(m_1)"'] & G(A_1) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G(C_1) \arrow[r, "G(C_1)"] \arrow[d, "G(C_1)"'] & G(C_1) \arrow[d, "G(u_1)"] \arrow[dl, Rightarrow, "G(t_1e_1)"', "G(C_1)"] \\ G(C_1) \arrow[r, "G(u_1)"'] & G(A_1) \end{tikzcd}$$

entnimmt man dann die Gleichungen $e_1t_1 = B_1$ und $t_1e_1 = C_1$ und somit wegen $M_1\cdot \mathrm{Iso}(K_1) \subset M_1$ die Behauptung.

4. <u>Relative Bildzerlegungen und (lokale) Adjungiertheit</u>

(3.11) führt zur folgenden

(<u>4.1</u>) <u>DEFINITION</u>: Man sagt, daß $G\colon K_1 \longrightarrow K_o$ für eine Teilklasse $M_1 \subset K_1$ <u>(epimorphe)</u> M_1- <u>Cobilder</u> hat, wenn G $(Q_G^{(o)}(M_1),\ M_1)$-zerlegbar ist und $M_1\cdot \mathrm{Iso}(K_1) \subset M_1$ gilt. Im dualen Fall sagt man, daß G für $E_1 \subset K_1$ <u>(monomorphe)</u> E_1-<u>Bilder</u> hat.

Zu bemerken ist, daß nach (3.11)(i) $\Longrightarrow$ (ii) im Falle der Existenz epimorpher M_1-Cobilder $Q_G^o(M_1) = Q_G(M_1)$ ist (vgl. auch (3.3)(4)).

Wir notieren zwei einfache Sonderfälle für G:

(1) Hat G einen Linksadjungierten F, so hat G K_1-Cobilder. Das zeigt, daß in (3.11) die Bedingung (iii) im allgemeinen nicht äquivalent zu (i), (ii) ist. Ist nämlich η die Adjunktionseinheit, so ist G für

$$E_o := \{(G(i_1)\eta(A_o),B_1)\colon A_o \in \mathrm{Ob}K_o,\ i_1\colon F(A_o) \longrightarrow B_1 \text{ Isomorphismus}\}$$

und $M_1 := \{m_1\colon\ m_1\colon A_1 \longrightarrow B_1 \text{ in } K_1,\ A_1 \cong F(A_o) \text{ für ein } A_o \in \mathrm{Ob}K_o\ \}$

(E_o, M_1)-zerlegbar. Außerdem ist (E_o, M_1) ein Isbell-Zerlegungspaar mit $G(\mathrm{Iso}(K_1))\cdot E_o \subset E_o$ sowie $M_1 \cdot \mathrm{Iso}(K_1) \subset M_1$, jedoch ist $U_G(E_o) = K_1$, also im allgemeinen ungleich zu M_1.

(2) Ist G eine Faserung, so hat G $\mathrm{Init}_G(K_1)$-Cobilder; dabei ist

$$Q_G(\mathrm{Init}_G(K_1)) = \{(i_o, A_1) \in \mathrm{Mor}(G) : i_o \text{ Isomorphismus}\}.$$

Für jeden Funktor G ist $\mathrm{Init}_G(K_1) = U_G(Q_G(\mathrm{Init}_G(K_1)))$, so daß die in (2.1)(5) erwähnten Eigenschaften sämtlichst aus (3.2) folgen. In Verbindung mit (3.8) ergibt sich insbesondere das

(4.2) KOROLLAR: Ein Linksadjungierter zu einer Faserung ist stets treu und voll.

Es wird jetzt noch ein etwas allgemeinerer relativer Bildzerlegungsbegriff eingeführt, der als Spezialfall Kaput's lokal adjungierbare Funktoren umfaßt (vgl. [40]).

(4.3) DEFINITION: $M_1 \subset K_1$ sei eine Teilklasse mit $M_1 \cdot \mathrm{Iso}(K_1) \subset M_1$. Man sagt, daß G lokale (epimorphe) M_1-Cobilder hat, wenn für alle $(f_o, A_1) \in \mathrm{Mor}(G)$ ein $(e_o, B_1) \in \mathrm{Mor}(G)$ $(\mathrm{Epi}(G))$ und ein $m_1 : B_1 \longrightarrow A_1$ in M_1 existiert, so daß $f_o = G(m_1)e_o$ gilt und die folgende Bedingung erfüllt ist:

(4.3.1) Für alle $(g_o, C_1) \in \mathrm{Mor}(G)$ und $n_1 : C_1 \longrightarrow A_1$ in M_1 mit $G(n_1)g_o = G(m_1)e_o$ gibt es genau ein $t_1 : B_1 \longrightarrow C_1$ in K_1 mit $n_1 t_1 = m_1$ und $G(t_1)e_o = g_o$.

$$\begin{tikzcd}
 & G(B_1) \arrow[dd, dashed, "G(t_1)"] \arrow[dr, "G(m_1)"] & \\
A_o \arrow[ur, "e_o"] \arrow[dr, "g_o"'] & & G(A_1) \\
 & G(C_1) \arrow[ur, "G(n_1)"'] &
\end{tikzcd}$$

Hat G lokale K_1-Cobilder, so heißt G lokal linksadjungierbar. Duale Begriffe: Lokale (monomorphe) E_1-Bilder, lokal rechtsadjungierbar.

Definition (4.3) erweist sich schon dadurch als kanonisch, daß sie sich durch die (gewöhnliche) Adjungierbarkeit gewisser Funktoren zwischen Kommakategorien ausdrücken läßt. G hat nämlich genau dann lokale M_1-Cobilder, wenn für alle $A_1 \in \mathrm{Ob}K_1$ die durch G induzierten Funktoren

$$\langle M_1, A_1 \rangle \longrightarrow \langle K_o, G(A_1) \rangle$$

Linksadjungierte besitzen.

Ist M_1 eine objektgleiche Unterkategorie von K_1, für die aus $m_1 n_1 \in M_1$ und $m_1 \in M_1$ auch $n_1 \in M_1$ folgt, so ist die Existenz lokaler M_1-Cobilder von G auch gleichbedeutend mit der Existenz eines Linksadjungierten zum offensichtlichen, durch G induzierten Funktor

$$\langle M_1, M_1 \rangle \longrightarrow \langle K_o, G/M_1 \rangle\ ^1.$$

Im Spezialfall $M_1 = K_1$ liegt dann genau Thm.A aus [40] vor. Hat K_o Pullbacks, so gibt es noch eine andere Möglichkeit, die Existenz lokaler M_1-Cobilder durch die Existenz von Adjungierten zu formulieren: vgl.(11.1).

Zu bemerken ist noch, daß die in (4.3) eingeführte Sprechweise im Einklang zu (3.4) steht. Ist nämlich

$$E_o := \{(e_o, B_1) : \text{Es gibt ein } m_1 : B_1 \longrightarrow A_1 \text{ in } M_1, \text{ so daß (4.3.1) gilt}\},$$

so folgt

$$E_o = {}^{loc}Q_G(M_1),$$

sofern M_1 eine objektgleiche Unterkategorie von K_1 ist.
Man erhält jedoch umgekehrt aus der $({}^{loc}Q_G(M_1), M_1)$-Zerlegbarkeit von G im allgemeinen nicht die Existenz lokalen M_1-Cobildern. Den genauen Zusammenhang stellt der folgende Satz her:

(4.4) THEOREM: Es sei $M_1 \subset K_1$ mit $M_1 \cdot \mathrm{Iso}(K_1) \subset M_1$. Hat dann $G : K_1 \longrightarrow K_o$ M_1-Cobilder, so auch lokale M_1-Cobilder; dabei ist ${}^{loc}Q_G(M_1) = Q_G(M_1)$.

---
[1] M_1 ist als Kategorie im eigenen Recht aufzufassen.

Hat G lokale M_1-Cobilder und ist M_1 kompositionsabgeschlossen, so ist G $({}^{loc}Q_G(M_1), M_1)$-zerlegbar. Ist G $({}^{loc}Q_G(M_1), M_1)$-zerlegbar und hat K_1 M_1-Urbilder, die von G (als Pullbacks) erhalten werden, so hat G M_1-Cobilder.

Beweis: Die erste Aussage ist trivial; dabei weist man die Inklusion ${}^{loc}Q_G(M_1) \subset Q_G(M_1)$ genauso wie die Inklusion $Q_G(M_1) \subset E_o$ in (3.11) nach. Die zweite Aussage folgt daraus, daß e_o in (4.3.1) in ${}^{loc}Q_G(M_1)$ ist, und die letzte aus (3.6)(6).

Für (lokale) relative Bildzerlegungen notieren wir den folgenden Kompositionssatz:

(4.5) PROPOSITION: H: $K_2 \longrightarrow K_1$ habe (lokale) M_2-Cobilder und G: $K_1 \longrightarrow K_o$ (lokale) M_1-Cobilder. Dann hat G∘H im Falle $H(M_2) \subset M_1$ (lokale) M_2-Cobilder.

Auf die Formulierung der "epimorphen Versionen" von (4.4) und (4.5) wurde verzichtet.

(4.6) KOROLLAR: Sind G und H lokal linksadjungierbar, so auch G∘H.

Der folgende Satz stellt den Zusammenhang zu den üblichen Bildzerlegungen in Kategorien her:

(4.7) PROPOSITION: Für $M_1 \subset K_1$ gilt: Ist $M_1 \subset \mathrm{Init}_G(K_1)$ und hat G (lokale; epimorphe) M_1-Cobilder, so auch K_1. Hat G einen Linksadjungierten und K_1 (lokale; epimorphe) M_1-Cobilder, so auch G.

Beweis: Eine (lokale; epimorphe) M_1-Cobildzerlegung zu $f_1 \in K_1$ erhält man

aus der (lokalen; epimorphen) M_1-Cobildzerlegung $G(f_1) = G(m_1)e_o$ und dem eindeutig bestimmten $e_1 \in K_1$ mit $m_1e_1 = f_1$ und $G(e_1) = e_o$. Die zweite Aussage folgt aus (4.5) unter Berücksichtigung von (4.1)(1) und (4.4).

Relative Bildzerlegungen entstehen "meistens" wie in (4.6) beschrieben, also mit Hilfe von Bildzerlegungen in Kategorien und einem Linksadjungierten (dual: Rechtsadjungierten), oder es liegt lokale Adjungierbarkeit vor. Darüberhinaus gibt es jedoch weitere wichtige Beispiele. So hat der vergeßliche Funktor von den endlichen Gruppen in die endlichen Mengen epimorphe Mono-Cobilder. Das gilt allgemeiner sogar für den Vergißfunktor einer Kategorie von universellen Algebren eines gewissen Typs mit endlicher Trägermenge in die Kategorie der endlichen Mengen. Das bedeutet (auch im nicht-endlichen Fall) gerade die Existenz einer kleinsten, von einer Teilmenge erzeugten Unteralgebra.
Für den dualen Fall hat man etwa folgendes elementare Beispiel: Der Inklusionsfunktor der zusammenhängenden Räume in *Top* hat monomorphe Epi-Bilder. Das bedeutet nichts anderes, als daß das stetige Bild eines zusammenhängendes Raumes zusammenhängend ist.

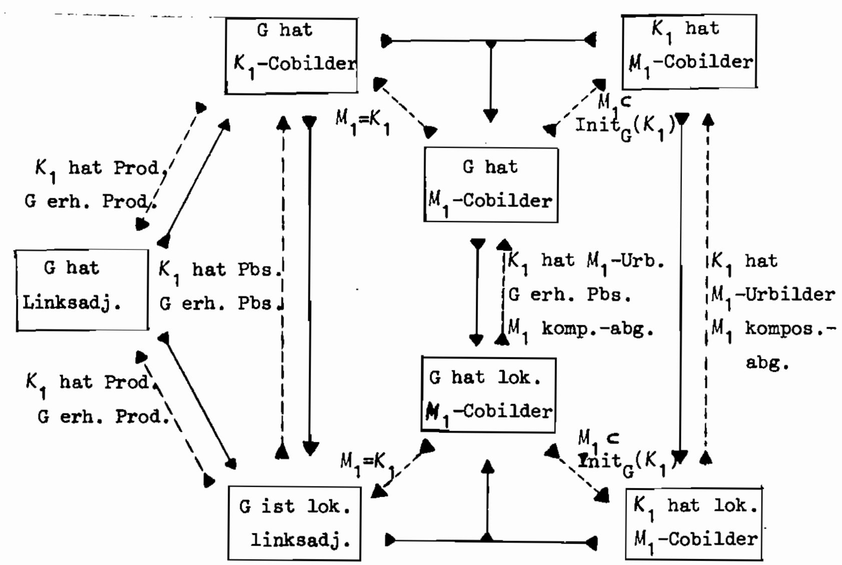
Lokale Linksadjungierbarkeit hat "in den meisten Fällen" bereits die Existenz eines Linksadjungierten zur Folge:

(4.8) THEOREM: K_1 habe endliche Produkte. Dann hat G: $K_1 \longrightarrow K_o$ genau dann einen Linksadjungierten, wenn G lokal linksadjungierbar ist und endliche Produkte erhält.

Beweis: Es ist nur die Existenz eines Linksadjungierten zu zeigen. Zu

$A_o \in \mathrm{Ob}K_o$ wählt man sich ein $e_o: A_o \longrightarrow G(A_1)$ in ${}^{loc}Q_G(K_1)$. Das ist wegen der Existenz eines Endobjektes in K_1, dessen Erhaltung durch G und der lokalen Linksadjungierbarkeit von G möglich (vgl. auch (4.4)).
Es sei nun $f_o: A_o \longrightarrow G(B_1)$ in K_o. Dann existiert genau ein $g_o: A_o \longrightarrow G(A_1 \pi B_1)$ mit $G(p_1)g_o = e_o$ und $G(q_1)g_o = f_o$, wobei p_1 und q_1 Projektionen des direkten Produkts $A_1 \pi B_1$ sind. Für das s_1 mit $p_1 s_1 = A_1$ und $G(s_1)e_o = g_o$ gilt dann $G(q_1 s_1)e_o = f_o$. Umgekehrt bestimmt ein $f_1: A_1 \longrightarrow B_1$ mit $G(f_1)e_o = f_o$ ein t_1 mit $p_1 t_1 = A_1$ und $q_1 t_1 = f_1$, für das $t_1 = s_1$ und somit $q_1 s_1 = f_1$ gilt.

(4.8) macht den wesentlichen Grund deutlich, warum beispielsweise die Inklusion der algebraisch abgeschlossenen Körper in der Kategorie der Körper nur lokal linksadjungierbar ist, aber keinen Linksadjungierten besitzt: Es fehlen direkte Produkte! (Vgl. auch die anderen Beispiele in [40].) Insgesamt bestehen folgende Zusammenhänge:



(4.9) BEMERKUNGEN:

(1) Ohne Schwierigkeiten führt man relative Bildzerlegungen noch allgemeiner ein, indem man nämlich zwei Funktoren $H_i: K_i \longrightarrow K$, $i=0,1$, zugrundelegt und Faktorisierungen von Morphismen $f: H_o(A_o) \longrightarrow H_1(A_1)$ betrachtet. Auf diese Weise ließen sich beispielsweise Pumplün's universelle Probleme (vgl. [59]; s.auch [73]) einbeziehen. Außerdem könnte man dann (4.1)(2) allgemeiner für $\mathcal{D}$-initiale Überlagerungen formulieren. (Auf die Möglichkeit einer derartigen Verallgemeinerung der relativen Bildzerlegungen hat jetzt auch Wischnewsky [79] hingewiesen.)

(2) Lokale Zerlegungen werden in den folgenden Kapiteln nur am Rande auftreten. Deshalb wurden sie hier weniger gründlich behandelt, obwohl sich noch eine Vielzahl zu bearbeitender Probleme anbietet. Im Zusammenhang mit lokaler Adjungierbarkeit verdienen sicherlich - über die Untersuchungen von Kaput hinaus - die lokalen Reflexionen und Coreflexionen Interesse. Zur Untersuchung bietet sich beispielsweise die Frage nach der Existenz einer lokal-reflexiven Hülle einer Klasse von Objekten in einer Kategorie an.

5. Existenzsätze

Den bekannten Existenzsätzen über Bildzerlegungen (vgl. z.Bsp. Herrlich [26], [28]) liegt die folgende verallgemeinerte Version zugrunde:

(5.1) THEOREM: K_1 sei für eine Teilklasse $M_1 \subset K_1$ mit $\mathrm{Iso}(K_1) \subset M_1 \subset \mathrm{Mono}(K_1)$ und $M_1 \cdot \mathrm{Iso}(K_1) \subset M_1$ M_1-klein und habe verallgemeinerte M_1-Pullbacks. Erhält $G: K_1 \longrightarrow K_o$ diese Pullbacks, so hat G lokale M_1-

Cobilder. Diese sind epimorph, wenn K_1 auch Egalisatoren hat, die von G erhalten werden, und $M_1 \cdot \mathrm{Egal}(K_1) \subset M_1$ gilt.

Zum Beweis bildet man wie üblich das Pullback aller M_1-Morphismen mit Cobereich A_1, über deren Bild unter G der vorgegebene Morphismus f_o: $A_o \longrightarrow G(A_1)$ faktorisiert.

(5.2) KOROLLAR: K_1 sei für eine Teilklasse $M_1 \subset \mathrm{Mono}(K_1)$ M_1-klein und habe verallgemeinerte Pullbacks (und Egalisatoren), die von G erhalten werden. Dann hat G (epimorphe) M_1-Cobilder, wenn M_1

(a) eine stark universelle Unterkategorie mit $\mathrm{Iso}(K_1) \subset M_1$ ($\mathrm{Egal}(K_1) \subset M_1$)

oder im Falle K_1 vollständig

(b) eine universelle Unterkategorie mit $\mathrm{Iso}(K_1) \subset M_1$ ($\mathrm{Egal}(K_1) \subset M_1$), deren Morphismen gegen direkte Produkte abgeschlossen sind,

ist. Diese Bedingungen sind im Falle $M_1 \subset \mathrm{Init}_G(K_1)$ sogar notwendig.

Der Beweis folgt aus (5.1), (3.2), (3.10) und (4.4). Dabei ist zu (b) zu beachten, daß eine universelle und gegen direkte Produkte abgeschlossene Teilklasse $M_1 \subset K_1$ abgeschlossen gegen verallgemeinerte Pullbacks ist, wenn K_1 vollständig ist.

Im allgemeinen Fall hat man zwei Möglichkeiten, die Unterkategorie M_1 in (5.2) zu spezifizieren:

(1) $M_1 = \mathrm{Mono}(K_1)$

Dann erhält man die (Extremal Generating, Mono)-Faktorisierungen aus [28], die im Falle der Identität für G die epimorphen Mono-Cobilder (= (Ext-Epi, Mono)-Faktorisierungen) einer vollständigen, Mono-kleinen Kategorie liefern.

(2) $M_1 = U^o_{K_1}(\mathrm{Epi}(K_1))$

Dann erhält man die (Generating, Extremal Mono)-Faktorisierungen aus [28], die im Falle der Identität für G die monomorphen Epi-Bilder (= (Epi, Ext-Mono)-Faktorisierungen) einer vollständigen, Ext-Mono-kleinen Kategorie liefern.

Man vergleiche hierzu auch die Untersuchungen in [14].

Die Beschränkung auf Monomorphismen in (5.1), (5.2) schließt sowohl wichtige Beispiele von Bildzerlegungen in Kategorien (vgl. besonders [13], [31]) als auch die Anwendung auf lokale Linksadjungierbarkeit aus. Wir behandeln daher jetzt noch den allgemeinen Fall.

(5.3) BEMERKUNG: Hat G einen Linksadjungierten, so gilt:

(1) G ist (Ext-) Epi-coklein, wenn K_1 (Ext-) Epi-coklein ist. [1]

(2) Für $M_1 \subset K_1$ ist G ${}^{(loc)}Q^o_G(M_1)$-coklein, wenn K_1 ${}^{(loc)}Q^o_{K_1}(M_1)$-coklein ist.

(5.4) THEOREM: K_1 sei für eine Unterkategorie $M_1 \subset K_1$ mit $\mathrm{Egal}(K_1) \subset M_1$ ($\mathrm{Mono}(K_1) \subset M_1$) $M_1 \cap \mathrm{Mono}(K_1)$-klein und habe verallgemeinerte M_1-Pullbacks und Egalisatoren, die von G erhalten werden. Ist dann G (Ext-) Epi-coklein, so hat G lokale epimorphe M_1-Cobilder.

Beweis: Zu f_o: $A_o \longrightarrow G(A_1)$ in K_o wählt man eine repräsentative Menge von G-Epimorphismen (im Falle $\mathrm{Mono}(K_1) \subset M_1$: von ${}^{loc}Q^o_G(\mathrm{Mono}(K_1))$- Morphismen) e^i_o: $A_o \longrightarrow G(B^i_1)$, für die ein m^i_1: $B^i_1 \longrightarrow A_1$ in M_1 mit $G(m^i_1)e^i_o = f_o$

[1] G heißt Ext-Epi-coklein, wenn G ${}^{loc}Q^o_G(\mathrm{Mono}(K_1)$-coklein ist: vgl. Fußnote Seite 26.

existiert. Weil G nach (5.1) lokale epimorphe $M_1 \cap \mathrm{Mono}(K_1)$-Cobilder hat, ist diese Menge nicht leer. Man bildet dann wieder das Pullback $m_1: B_1 \longrightarrow A_1$ der m_1^i und zerlegt den induzierten Morphismus $g_o: A_o \longrightarrow G(B_1)$ mit $G(p_1^i)g_o = e_o$ (p_1^i Pullbackprojektionen) in der Form $g_o = G(n_1)e_o$ mit $n_1 \in M_1 \cap \mathrm{Mono}(K_1)$ und $e_o \in {}^{loc}Q_G^o(M_1 \cap \mathrm{Mono}(K_1))$. $G(m_1 n_1)e_o = f_o$ ist die gesuchte Zerlegung.

(5.5) KOROLLAR: K_1 habe verallgemeinerte Pullbacks und Egalisatoren, die von G erhalten werden, und sei für $M_1 \subset K_1$ $M_1 \cap \mathrm{Mono}(K_1)$-klein. G sei Epi-coklein bzw. im Falle $\mathrm{Mono}(K_1) \subset M_1$ Ext-Epi-coklein. Ist dann M_1

(a) eine stark universelle Unterkategorie mit $\mathrm{Egal}(K_1) \subset M_1$

oder im Falle K_1 vollständig

(b) eine universelle Unterkategorie mit $\mathrm{Egal}(K_1) \subset M_1$, deren Morphismen gegen direkte Produkte abgeschlossen sind,

so hat G epimorphe M_1-Cobilder. Im Falle $M_1 \subset \mathrm{Init}_G(K_1)$ sind die Bedingungen (a) und (b) sogar notwendig.

Mit (5.5) kann man beispielsweise Thm.Two aus [13] etwas allgemeiner formulieren: Jede stetige Abbildung $f: X \longrightarrow Y$ eines topologischen Raumes X in einen Hausdorffraum Y besitzt eine (bis auf Homöomorphie) eindeutige Zerlegung in eine antiperfekte und eine perfekte stetige Abbildung. Dabei sind die antiperfekten Abbildungen gerade als die zu den perfekten Abbildungen von Hausdorffräumen gehörigen Quotienten relativ zum Einbettungsfunktor $Haus \hookrightarrow Top$ definiert.

Aus (5.4) folgt außerdem das

(5.6) KOROLLAR: Hat K_1 verallgemeinerte Pullbacks und Egalisatoren, die von G erhalten werden, und ist K_1 Mono-klein und G Ext-Epi-coklein, so hat G K_1-Cobilder und ist damit insbesondere lokal linksadjungierbar.

Abschließend wenden wir uns noch gesondert dem Fall

$$G = \Delta_D : K \longrightarrow [D,K] ,$$

also der Faktorisierbarkeit von Cokegeln bzw. dual von Kegeln zu. Natürlich finden die vorangehenden Existenzsätze insbesondere für diesen Fall Anwendung. Es ist jedoch naheliegender, von Bildzerlegungen der Kategorie K auszugehen.

(5.7) LEMMA: K besitze für $E \subset K$ (monomorphe) E-Bilder. Dann besitzt die Funktorkategorie $[D,K]$ (monomorphe) E_D-Bilder, wobei E_D aus allen punktweisen E-Morphismen in $[D,K]$ besteht. $U^{(o)}_{[D,K]}(E_D)$ besteht dann aus allen punktweisen $U^{(o)}_K(E)$-Morphismen.

Dabei ist zusätzlich zu bemerken, daß man für alle Kegel in $[D,K]$ aus lokalen E-Bildern in K lokale E_D-Bilder konstruieren kann.

Der Beweis zu (5.7) ist kanonisch. Zur Berechnung von $U^{(o)}_{[D,K]}(E_D)$ ist (3.11) zu beachten.

(5.8) PROPOSITION: K habe für $E \subset \mathrm{Epi}(K)$ (monomorphe) E-Covereinigungen.[1]
Dann sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:

(i) K hat lokale (monomorphe) E-Bilder.

(ii) Für alle kleinen D hat Δ_D lokale (monomorphe) E-Bilder.

Wenn K E-coklein ist, so sind (i) und (ii) auch äquivalent zu

(iii) Für alle D hat Δ_D lokale (monomorphe) E-Bilder.

[1] E-Covereinigungen sind sicher dann monomorph, wenn K Coegalisatoren hat und E alle Coegalisatoren von K enthält.

Beweis: Es ist nur (i) $\Longrightarrow$ (ii),(iii) zu zeigen. Ist für alle $D \in \mathrm{Ob}\mathcal{D}$ $\mu(D)\eta(D) = \alpha(D)$ die punktweise Zerlegung von $\alpha: \Delta_{\mathcal{D}}(X) \longrightarrow F$, so bildet man zum Beweis von (ii) die Covereinigung $e: X \longrightarrow Y$ der $\mathcal{E}$-Morphismen $\eta(D)$, so daß $j_D\, e = \eta(D)$ gilt. Durch $\beta(D) := \mu(D) j_D$ wird dann ein Kegel β definiert mit $\alpha = \beta\Delta_{\mathcal{D}}(e)$. Zum Nachweis von (iii) ist die Covereinigung lediglich für ein System nicht-isomorpher Morphismen $\eta(D)$, $D \in \mathbb{D} \subset \mathrm{Ob}\mathcal{D}$, zu bilden. (Man beachte, daß der Fall $\mathcal{D} = \emptyset$ zugelassen ist.)

(<u>5.9</u>) <u>LEMMA</u>: Hat $\mathcal{K}$ Produkte und für $\mathcal{E} \subset \mathrm{Epi}(\mathcal{K})$ lokale (monomorphe) $\mathcal{E}$-Bilder, so auch (monomorphe) $\mathcal{E}$-Covereinigungen.

(<u>5.10</u>) <u>PROPOSITION</u>: Hat $\mathcal{K}$ Produkte, so sind für $\mathcal{E} \subset \mathcal{K}$ äquivalent:

(i) $\mathcal{K}$ hat (lokale; monomorphe) $\mathcal{E}$-Bilder.

(ii) Für alle kleinen, diskreten $\mathcal{D}$ hat $\Delta_{\mathcal{D}}$ (lokale;monomorphe) $\mathcal{E}$-Bilder.

Im Falle $\mathcal{E} \subset \mathrm{Epi}(\mathcal{K})$ kann man die Beschränkung auf diskrete $\mathcal{D}$ weglassen, und wenn $\mathcal{K}$ noch $\mathcal{E}$-coklein ist, ist außerdem zu (i), (ii) äquivalent:

(iii) Für alle $\mathcal{D}$ hat $\Delta_{\mathcal{D}}$ (lokale; monomorphe) $\mathcal{E}$-Bilder.

Zum Beweis von (i) $\Longrightarrow$ (ii) geht man wie in (2.4)(iii) $\Longrightarrow$ (ii) vor. Die Äquivalenz von (iii) zu (i),(ii) folgt im lokalen Fall aus (5.8) und (5.9). Im anderen Fall hat man sich klarzumachen, daß wegen der Existenz von Produkten die in (5.8) konstruierte Zerlegung ein (monomorphes) $\mathcal{E}$-Bild für $\Delta_{\mathcal{D}}$ liefert, sofern (monomorphe) $\mathcal{E}$-Bilder in $\mathcal{K}$ vorliegen.

(<u>5.11</u>) <u>BEMERKUNG</u>: Die in diesem Paragraphen behandelten Existenzsätze besitzen naheliegende Modifikationen für Kategorien, in denen nur endliche Limites existieren (etwa endliche Gruppen u.s.w.) In (5.1) würde man dann beispielsweise statt "$\mathcal{M}_1$-klein" "$\mathcal{M}_1$-endlich" fordern und erhielte das gleiche Ergebnis.

III. <u>EXISTENZ VON ADJUNGIERTEN UND COLIMITES</u>

6. <u>Adjungierte Dreiecke</u>

Das grundlegende Existenzkriterium für adjungierte Funktoren ist das Adjoint Functor Theorem von Freyd [19], das in seinen Anfängen schon auf Bourbaki [8] und in einem Spezialfall sogar auf Birkhoff [7] zurückgeht:

(<u>6.1</u>) <u>THEOREM</u>: Der Funktor $G: \mathcal{K}_1 \longrightarrow \mathcal{K}_o$ hat einen Linksadjungierten, wenn

(1) $\mathcal{K}_1$ Produkte hat,

(2) G Produkt-stetig ist

und für eine Teilklasse $\mathcal{E}_o \subset \mathrm{Epi}(G)$

(3) G $(\mathcal{E}_o, \mathcal{K}_1)$-Zerlegungen hat,

(4) G $\mathcal{E}_o$-coklein ist.

Die Bedingung (2) ist notwendig; ebenso (3), wenn $Q_G^o(\mathcal{K}_1) \subset \mathcal{E}_o$ gilt. Schließlich ist nach (5.3)(2) für $\mathcal{E}_o = Q_G^o(\mathcal{M}_1)$, $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{K}_1$, auch (4) notwendig, wenn $\mathcal{K}_1$ $Q_{\mathcal{K}_1}^o(\mathcal{M}_1)$-coklein ist.

In Verbindung mit (5.1) ergibt sich daraus das wichtige

(<u>6.2</u>) <u>KOROLLAR</u>: $\mathcal{K}_1$ sei vollständig. Ist dann

(a) $\mathcal{K}_1$ für eine gegen verallgemeinerte Pullbacks abgeschlossene Unterkategorie $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{K}_1$ mit $\mathrm{Egal}(\mathcal{K}_1) \subset \mathcal{M}_1 \subset \mathrm{Mono}(\mathcal{K}_1)$ $\mathcal{M}_1$-klein und G ${}^{loc}Q_G^o(\mathcal{M}_1)$-coklein

oder (b) $\mathcal{K}_1$ Mono-klein und G Ext-Epi-coklein

oder (c) $\mathcal{K}_1$ Ext-Mono-klein und G Epi-coklein,

so hat G genau dann einen Linksadjungierten, wenn G stetig ist.

Ein zweiter Beweis für (6.2)(b) ergibt sich aus (4.8) und (5.6).

(6.1) kann man speziell auf volle Unterkategorien anwenden (Satz von Birkhoff):

(<u>6.3</u>) <u>PROPOSITION</u>: K habe Produkte und für $M \subset K$ epimorphe M-Cobilder und sei $Q^{o}_{K}(M)$-coklein. Dann ist die volle Unterkategorie $K' \subset K$ genau dann $Q^{o}_{K}(M)$-reflexiv, wenn K' schwach M- und Produkt-abgeschlossen in K ist.

Zum Beweis benötigt man lediglich noch das folgende

(<u>6.4</u>) <u>LEMMA</u>: $K' \subset K$ sei eine volle, reflexive Unterkategorie und $M \subset K$ eine Teilklasse. Dann gilt:

(1) Ist K' schwach M-abgeschlossen in K und hat K epimorphe M-Cobilder, so ist K' $Q^{o}_{K}(M)$-reflexiv in K.

(2) Ist K' $Q_{K}(M)$-reflexiv in K, so ist K' schwach M-abgeschlossen in K.

Wir notieren noch einen weiteren Spezialfall zu (6.1):

(<u>6.4a</u>) <u>PROPOSITION</u>: $P: K' \longrightarrow K$ sei treu und stark Faser-klein. Hat K' Produkte, so hat P genau dann einen vollen und treuen (Rechtsinvers-) Linksadjungierten, wenn P Produkte erhält und (identitiv) K'-Morphismen aus K-Morphismen erzeugt.

Man wendet (6.1) für $E_o := J_P$ aus (2.5) an. P erzeugt insbesondere dann K'-Morphismen aus K-Morphismen, wenn es eine Faserung ist. In diesem Fall ist P aber unter den obigen Voraussetzungen bereits eine Top-Kategorie (vgl. (2.7)).

Wir wenden uns jetzt wieder der allgemeinen Situation zu. Es kommt darauf an, die Bedingungen (3), (4) aus (6.1) bzw. die Cokleinheitsbedingungen aus (6.2) durch handlichere zu ersetzen. Dabei entspricht es der Situation bei einer Vielzahl von Anwendungen, einen Funktor P_o von K_o in eine Kategorie K (mit "schönen" Eigenschaften) zu betrachten, derart daß $P_1 := P_o \circ G$ und gegebenenfalls auch P_o einen Linksadjungierten besitzt.

$$\begin{tikzcd} K_1 \arrow[rr, "G"] \arrow[dr, "P_1"'] & & K_o \arrow[dl, "P_o"] \\ & K & \end{tikzcd}$$

Dubuc [10] hat für prämonadisches P_o eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz eines Linksadjungierten für G angegeben (vgl. auch[66]). Baumgartner [5] hat dann für treues P_o diese Bedingung unter Benutzung von Sieben umformuliert, jedoch auf weniger anschauliche und den Anwendungen entsprechende Weise. Im folgenden wird dagegen für treues P_o eine größtmögliche Anlehnung an die Dubuc'sche Bedingung beibehalten. Die Idee hierzu geht auf Greve [25] zurück.

Für treues $P_o: K_o \longrightarrow K$ betrachten wir die volle Einbettung

$$E : K_1 \longrightarrow \langle P_o, P_1 \rangle$$

mit $E(u_1) := (G(u_1), u_1): (G(A_1), P_1(A_1), A_1) \longrightarrow (G(B_1), P_1(B_1), B_1)$ für alle $u_1: A_1 \longrightarrow B_1$ in K_1 und definieren:

(<u>6.5</u>) <u>DEFINITION</u>: $(A_o, f, A_1) \in \mathrm{Ob}\langle P_o, P_1 \rangle$ hat einen (G, P_o)-<u>Quotienten</u>, wenn E in (A_o, f, A_1) eine lokale universelle Lösung besitzt, d.h. es gibt ein $q_1: A_1 \longrightarrow B_1$ und ein $q_o: A_o \longrightarrow G(B_1)$, so daß gilt:

(1) $P_1(q_1)\, f = P_o(q_o)$. [1]

---

[1] q_o wird also durch q_1 eindeutig bestimmt.

(2) Für alle $x_1:A_1 \longrightarrow C_1$ und $x_o:A_o \longrightarrow G(C_1)$ mit $P_1(x_1)\,f = P_o(x_o)$ gibt es genau ein y_1 mit $y_1 q_1 = x_1$.

$$\begin{tikzcd}
 & & P_1(B_1) \arrow[dd, dashed, "P_1(y_1)"] \\
P_o(A_o) \arrow[r, "f"] \arrow[urr, "P_o(q_o)"] \arrow[drr, "P_o(x_o)"'] & P_1(A_1) \arrow[ur, "P_1(q_1)"'] \arrow[dr, "P_1(x_1)"] & \\
 & & P_1(C_1)
\end{tikzcd}$$

Wir formulieren jetzt den allgemeinen "Dreieckssatz" für adjungierte Funktoren:

(<u>6.6</u>) <u>THEOREM</u>: $P_o: K_o \longrightarrow K$ sei treu und $P_1 := P_o \circ G$ mit $G: K_1 \longrightarrow K_o$ habe einen Linksadjungierten F_1 mit der Einheit η_1 und der Coeinheit ε_1. Dann sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:

(i) G hat einen Linksadjungierten.

(ii) Für alle $A_o \in \mathrm{Ob}K_o$ hat $(A_o, \eta_1 \circ P_o(A_o), F_1 \circ P_o(A_o))$ einen (G,P_o)-Quotienten.

Ist P_o sogar prämonadisch (P_o hat also insbesondere einen Linksadjungierten F_o mit der Einheit η_o und der Coeinheit ε_o), so ist (ii) äquivalent zu

(iii) Für alle $A_o \in \mathrm{Ob}K_o$ hat K_1 einen Coegalisator zu dem Paar
$((F_1 \circ P_o \circ \varepsilon_o)(A_o)\,,\,(\varepsilon_1 \circ F_1 \circ P_o)(A_o)(F_1 \circ P_o \circ \mu \circ P_o)(A_o))$, wobei
$\mu: F_o \longrightarrow G \circ F_1$ durch $(P_o \circ \mu)\eta_o = \eta_1$ bestimmt wird (vgl. (1.2)(i)).

(i) $\Longleftrightarrow$ (iii) ist gerade der Satz von Dubuc. (iii) ist eine unmittelbare Verallgemeinerung von (ii), weil für prämonadisches P_o die genannten (G,P_o)-Quotienten mit den benötigten Coegalisatoren übereinstimmen.

Beweis: (ii) $\Longrightarrow$ (i): Für alle $A_o \in \mathrm{Ob}K_o$ wählt man ein $\pi(A_o): F_1 \circ P_o(A_o) \longrightarrow$

$H(A_o)$ $(:= \mathrm{Cob}(\pi(A_o)))$ und ein $\gamma(A_o): A_o \longrightarrow G(H(A_o))$ mit $P_1(\pi(A_o))\eta_1(P_o(A_o)) = P_o(\gamma(A_o))$ und weist ohne Schwierigkeiten nach, daß auf diese Weise ein Linksadjungierter H zu G mit der Einheit γ definiert wird. (i) $\Longrightarrow$ (ii): Ist H linksadjungiert zu G mit der Einheit γ, so folgt mit $\pi := (\varepsilon_1 \circ H)(F_1 \circ P_o \circ \gamma)$ sofort $(P_1 \circ \pi)(\eta_1 \circ P_o) = P_o \circ \gamma$. Damit ist (6.5)(1) gezeigt, und (6.5)(2) verifiziert man jetzt "geradeaus". (ii) $\Longleftrightarrow$ (iii): Es genügt, für alle $x_1: F_1 \circ P_o(A_o) \longrightarrow C_1$ in K_1 die Äquivalenz der beiden folgenden Aussagen zu zeigen:

(a) Es gibt ein $x_o: A_o \longrightarrow G(C_1)$ mit $P_o(x_o) = P_1(x_1)\eta_1(P_o(A_o))$.

(b) $x_1\,(F_1 \circ P_o \circ \varepsilon_o)(A_o) = x_1\,(\varepsilon_1 \circ F_1 \circ P_o)(A_o)\,(F_1 \circ P_o \circ \mu \circ P_o)(A_o)$.

Im Falle (a) folgt aus $P_o(G(x_1)\mu(P_o(A_o)))\eta_o(P_o(A_o)) = P_o(x_o \varepsilon_o(A_o))\,\eta_o(P_o(A_o))$ die Gleichung $G(x_1)\mu(P_o(A_o)) = x_o \varepsilon_o(A_o)$. Daraus schließt man auf $P_1(x_1)\,(P_1 \circ \varepsilon_1 \circ F_1 \circ P_o)(A_o)\,(P_1 \circ F_1 \circ P_o \circ \mu \circ P_o)(A_o)\,(\eta_1 \circ P_o \circ F_o \circ P_o)(A_o) = P_1(x_1)\,(P_1 \circ F_1 \circ P_o \circ \varepsilon_o)(A_o)\,(\eta_1 \circ P_o \circ F_o \circ P_o)(A_o)$, so daß (b) folgt. Erfüllt umgekehrt x_1 die Gleichung (b), so folgt aus $P_1(x_1)\eta_1(P_o(A_o))P_o(\varepsilon_o(A_o)) = P_o(G(x_1)\mu(P_o(A_o)))$ die Aussage (a), weil $\varepsilon_o(A_o) \in \mathrm{Fin}_{P_o}(K_o)$ ist: vgl. (10.1).

(<u>6.7</u>) <u>KOROLLAR</u>: Für treues P_o hat mit $P_1 = P_o \circ G$ auch G einen Linksadjungierten, wenn

(a) $E: K_1 \longrightarrow \langle P_o, P_1 \rangle$ eine volle, reflexive Einbettung ist,

oder (b) K_1 Coegalisatoren hat und P_o prämonadisch ist.

Einen Linksadjungierten zu E konstruiert man mit Hilfe von (6.1). Dann folgt das

(<u>6.8</u>) <u>THEOREM</u>: $P_o: K_o \longrightarrow K$ sei treu, und $P_1 = P_o \circ G$ mit $G: K_1 \longrightarrow K_o$ habe einen Linksadjungierten. K_1 sei für $E_1 \subset \mathrm{Epi}(K_1)$ und $M_1 \subset K_1$ mit

$G(M_1) \subset \mathrm{Init}_{P_o}(K_o)$ (E_1,M_1)-zerlegbar und E_1-coklein. Außerdem besitze K_1 Produkte. Dann hat G genau dann einen Linksadjungierten, wenn G Produkte erhält.

Beweis: Mit G erhält auch E Produkte, und die (E_1,M_1)-Zerlegung führt wegen $G(M_1) \subset \mathrm{Init}_{P_o}(K_o)$ zu einer (E,M_1)-Zerlegung von E mit $E = \{((e_o,e_1),A_1) \in \mathrm{Mor}(E):\ e_1 \in E_1\}$.

(6.9) KOROLLAR: P_o sei treu und P_1 rechtsadjungiert. K_1 habe Produkte und reguläre Cobilder (= epimorphe Reg-Mono-Cobilder) und sei Epi-coklein. Dann hat G genau dann einen Linksadjungierten, wenn G Produkte und reguläre Monomorphismen erhält.

Zum Beweis verwendet man die Inklusionen $G(\text{Reg-Mono}(K_1)) \subset \text{Reg-Mono}(K_o) \cap P_o^{-1}(\mathrm{Mono}(K) \subset \mathrm{Init}_{P_o}(K_o)$: vgl. die zu (9.5)(1) duale Aussage.

(6.10) KOROLLAR: P_o sei treu und P_1 rechtsadjungiert. K_1 sei vollständig, Mono-klein und Epi-coklein. Dann hat G genau dann einen Linksadjungierten, wenn G stetig ist.

Beweis: Mit $M_1 := \mathrm{Mono}(K_1) \cap G^{-1}(\mathrm{Init}_{P_o}(K_o))$ verschafft man sich die in (6.8) benötigten Zerlegungen mit Hilfe von (5.1). (Ein anderer Beweis für (6.10) findet sich in [61].)

Im "algebraischen" Fall erhält man aus (6.7)(b) die bekannte

(6.11) PROPOSITION: K_1 habe Coegalisatoren. Dann ist mit P_o und P_1 auch G (prä- ; schwach) monadisch.

Zum Beweis beachte man außerdem (1.8) und (10.1). (Mit P_o und P_1 erzeugt auch G eindeutig Coegalisatoren G-absoluter Paare!)

Wir stellen einige Beispiele zusammen, die mit (6.8) oder (6.9) behandelt werden können und nicht zu den algebraischen Funktoren über *Me* oder einer Top-Kategorie über *Me* zählen (vgl. (13.6)):

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] \mathit{Haus} \arrow[rr, shift left] \arrow[dr] & & \mathit{Top} \arrow[ll, dashed, shift left] \arrow[dl] \\ & \mathit{Me} & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd}[column sep=small] \mathit{Unif} \arrow[rr, shift left] \arrow[dr] & & \mathit{Top} \arrow[ll, dashed, shift left] \arrow[dl] \\ & \mathit{Me} & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd}[column sep=small] \mathit{Norm}_\infty\mathit{Vek}_K \arrow[rr, dashed, shift left] \arrow[dr] & & \mathit{Met}_\infty \arrow[ll, dashed, shift left] \arrow[dl] \\ & \mathit{Me} & \end{tikzcd}$$

Met_∞ ($\mathit{Norm}_\infty\mathit{Vek}_K$) ist die Kategorie der metrischen Räume (K-linearen, normierten Räume über einem bewerteten Körper K), wobei jedoch die Metrik (Norm) den Wert ∞ annehmen darf; Morphismen sind kontrahierende (K-lineare) Abbildungen.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] \mathit{OrdGrp} \arrow[rr, shift left] \arrow[dr] & & \mathit{Ord} \arrow[ll, dashed, shift left] \arrow[dl] \\ & \mathit{Me} & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd}[column sep=small] \mathit{Grp} \arrow[rr, hook, shift left] \arrow[dr] & & \mathit{Grpd} \arrow[ll, dashed, shift left] \arrow[dl] \\ & \mathit{Me} & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd}[column sep=small] \mathit{Grpd} \arrow[rr, hook, shift left] \arrow[dr] & & \mathit{Cat} \arrow[ll, dashed, shift left] \arrow[dl] \\ & \mathit{Graph} & \end{tikzcd}$$

OrdGrp ist die Kategorie der angeordneten Gruppen. *Grpd* ist die Unterkategorie der Gruppoide in *Cat*.

Der Vollständigkeit halber wird noch eine Umkehrung zu den vorangehenden Sätzen angegeben.

(6.12) PROPOSITION: $P_o: K_o \longrightarrow K$ habe für $M_o \subset K_o$ epimorphe M_o-Cobilder und $G: K_1 \longrightarrow K_o$ einen Linksadjungierten H, derart daß die Einheit γ punktweise zu M_o gehört. Dann hat mit $P_1 = P_o \circ G$ auch P_o einen Linksadjungierten.

Beweis: Für $X \in \mathrm{Ob}K$ nimmt man eine M_o-Cobildzerlegung relativ zu P_o der zu P_1 und seinem Linksadjungierten F_1 gehörigen Einheit $\eta_1(X): X \longrightarrow$

$P_o(G \circ F_1(X))$ vor : $\eta_1(X) = P_o(m_o)\eta_o(X)$. Dann löst $\eta_o(X)$ das durch P_o gegebene universelle Problem in X:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "\eta_1(X)"] \arrow[dr, "\eta_o(X)"'] \arrow[dd, "f"'] & & P_1(F_1(X)) \arrow[dd, dashed, "P_1(f_1)"] \\
& P_o(F_o(X)) \arrow[ur, "P_o(m_o)"'] \arrow[dl, dashed, "P_o(f_o)"] & \\
P_o(Y_o) \arrow[rr, "P_o(\gamma(Y_o))"'] & & P_1(H(Y_o))
\end{tikzcd}$$

(6.13) KOROLLAR: Haben G und P_1 einen Linksadjungierten, so hat P_o genau dann einen Linksadjungierten, wenn P_o epimorphe K_o-Cobilder hat.

(6.12) kann man beispielsweise zur expliziten Konstruktion der freien Lie-Algebra über einem k-Vektorraum V verwenden: Man bildet die Tensoralgebra T(V) und betrachtet die von V in $T(V)^-$ erzeugte Unter-Lie-Algebra (vgl. [25]).

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{Alg}_k \arrow[rr, shift right, "\text{\"}-\text{\"}"'] \arrow[dr, shift right] & & \mathcal{LieAlg}_k \arrow[ll, shift right, "\text{univ. Einh.}"'] \arrow[dl, shift right, dashed] \\
& \mathcal{Vek}_k \arrow[ul, shift right, "\text{Tensoralgebra}"] \arrow[ur, shift right, dashed] &
\end{tikzcd}$$

7. Konstruktion von Colimites

Zunächst werden die Dreieckssätze aus § 6 angewendet, die zu nützlichen "Liftungssätzen" für Colimites führen.

Im folgenden sei $\mathcal{D}$ stets eine kleine Kategorie. Dann ergibt sich aus (6.8):

(7.1) THEOREM: P: $K' \longrightarrow K$ sei treu und rechtsadjungiert. K' sei für $E' \subset \mathrm{Epi}(K')$ und $M' \subset \mathrm{Init}_P(K')$ (E',M')-zerlegbar und E'-coklein. Außerdem habe K' Produkte. Dann ist mit K auch K' ($\mathcal{D}$-)covollständig.

Beweis: Man betrachtet das Dreieck

$$\begin{tikzcd}
K' \arrow[rr, "\Delta'"] \arrow[dr, "P"'] & & {[\mathcal{D},K']} \arrow[ddl, "{[\mathcal{D},P]}"] \\
& K \arrow[d, "\Delta"'] & \\
& {[\mathcal{D},K]} &
\end{tikzcd}$$

und hat dann lediglich zu beachten, daß mit P auch $[\mathcal{D},P]$ treu ist und wegen $M' \subset \mathrm{Init}_P(K')$ $\Delta'(M') \subset \mathrm{Init}_{[\mathcal{D},P]}([\mathcal{D},K'])$ gilt.

(7.2) KOROLLAR: P sei treu und rechtsadjungiert. K' habe Produkte und reguläre Cobilder und sei Epi-coklein. Dann ist mit K auch K' ($\mathcal{D}$-)covollständig.

(7.3) KOROLLAR: P sei treu und rechtsadjungiert. K' sei vollständig, Mono-klein und Epi-coklein. Dann ist mit K auch K' ($\mathcal{D}$-)covollständig.

Ebenso wie (7.1) aus (6.8) beweist man mit (6.7)(b) die "Liftbarkeit" von Colimites längs prämonadischer Funktoren. Man hat dabei lediglich mit Hilfe von (10.1) nachzuprüfen, daß mit G auch $[\mathcal{D},G]$ prämonadisch ist.

(7.4) THEOREM: G: $K_1 \longrightarrow K_o$ sei prämonadisch, und K_1 besitze Coegalisatoren. Dann ist mit K_o auch K_1 ($\mathcal{D}$-)(co-)vollständig.

Beweis: Zu zeigen bleibt die Liftbarkeit von Limites. (6.7)(b) garantiert die Existenz eines Linksadjungierten zum treuen und vollen Vergleichsfunktor zu G, womit wegen der Erzeugung von Limites durch monadische Funktoren alles gezeigt ist.

Die in (7.4) benötigten Coegalisatoren kann man sich mit Hilfe von Bildzerlegungen verschaffen (vgl. [66]), indem man (6.1) auf $\Delta : \mathcal{K} \longrightarrow [\mathcal{D},\mathcal{K}]$ anwendet, wobei jetzt $\mathcal{D}$ eine "Menge paralleler Pfeile" ist:

(7.5) PROPOSITION: $\mathcal{K}$ habe Produkte und sei für $\mathcal{E} \subset \mathrm{Epi}(\mathcal{K})$, $\mathcal{M} \subset \mathrm{Mono}(\mathcal{K})$ $(\mathcal{E},\mathcal{M})$-zerlegbar und $\mathcal{E}$-coklein. Dann hat $\mathcal{K}$ verallgemeinerte Coegalisatoren.

(7.6) KOROLLAR: Eine vollständige Kategorie $\mathcal{K}$ hat verallgemeinerte Coegalisatoren, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(a) $\mathcal{K}$ ist für eine gegen verallgemeinerte Pullbacks abgeschlossene Unterkategorie $\mathcal{M} \subset \mathcal{K}$ mit $\mathrm{Egal}(\mathcal{K}) \subset \mathcal{M} \subset \mathrm{Mono}(\mathcal{K})$ $\mathcal{M}$-klein und ${}^{\mathrm{loc}}Q^{\mathrm{o}}_{\mathcal{K}}(\mathcal{M})$-coklein.

(b) $\mathcal{K}$ ist Mono-klein und Ext-Epi-coklein.

(c) $\mathcal{K}$ ist Ext-Mono-klein und Epi-coklein.

Aus (7.6)(b) folgt insbesondere die Existenz von Coegalisatoren in der Kategorie der kleinen Kategorien. Wegen der Kleinheitsbedingungen ist jedoch Vorsicht geboten, die Existenzaussage auf beliebige Kategorien zu übertragen. Im Anhang werden wir eine sehr einfache, explizite Konstruktion angeben, deren Übertragung auf große Kategorien unproblematisch ist.

Nach (7.5) und (7.6) lassen sich Coegalisatoren also mit Hilfe "innerer" Eigenschaften einer Kategorie konstruieren. Das legt die Frage nahe, ob

dies auch für beliebige $\mathcal{D}$-Colimites, insbesondere Coprodukte möglich ist. Zunächst entnimmt man der Dualisierung von (5.8), daß im Falle der Existenz von lokalen, epimorphen $\mathcal{M}$-Cobildern und epimorphen $\mathcal{M}$-Vereinigungen für $\mathcal{M} \subset \mathrm{Mono}(\mathcal{K})$ ein Cokegel $\alpha : F \longrightarrow \Delta(A)$ genau dann in ${}^{\mathrm{loc}}Q^{\mathrm{o}}_{\Delta}(\mathcal{M})$ ist, wenn $A \cong \bigcup_{D \in \mathrm{Ob}\mathcal{D}} \mu(D)$ ist, wobei $\mu(D)$ das lokale $\mathcal{M}$-Cobild von $\alpha(D)$ ist. Das führt zur folgenden

(7.7) DEFINITION: Man sagt, daß in $\mathcal{K}$ für eine Teilklasse $\mathcal{M}$ mit $\mathrm{Iso}(\mathcal{K}) \subset \mathcal{M} \subset \mathrm{Mono}(\mathcal{K})$ (endliche) $\mathcal{M}$-Vereinigungen beschränkt sind, wenn es für alle kleinen (endlichen) Kategorien $\mathcal{D}$ und Funktoren $F : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{K}$ nur eine Menge nicht-isomorpher Objekte $\mu : F \longrightarrow \Delta(A)$ in der Kommakategorie $\langle F,\Delta\rangle$ gibt, die punktweise in $\mathcal{M}$ sind und für die $A \cong \bigcup_{D \in \mathrm{Ob}\mathcal{D}} \mu(D)$ in $\langle \mathcal{M},A\rangle$ ist.

Offenbar genügt es, Cokegel $\mu \in [\mathcal{D},\mathcal{K}]$ mit diskretem $\mathcal{D}$, also Familien von Morphismen aus $\mathcal{M}$ mit gemeinsamem Cobereich zu betrachten. Außerdem kann man (7.7) dadurch abschwächen, daß man die Mächtigkeit von $\mathcal{D}$ durch eine (reguläre) Kardinalzahl beschränkt. Im Falle $\mathcal{D} = \emptyset$ bedeutet (7.7) gerade, daß es in $\mathcal{K}$ nur eine Menge nicht-isomorpher Objekte gibt, die bis auf Isomorphie nur ein einziges $\mathcal{M}$-Unterobjekt (nämlich sich selbst) besitzen.

(7.8) LEMMA: $\mathcal{K}$ besitze für eine Unterkategorie $\mathcal{M} \subset \mathcal{K}$ mit $\mathrm{Iso}(\mathcal{K}) \subset \mathcal{M} \subset \mathrm{Mono}(\mathcal{K})$ lokale, epimorphe $\mathcal{M}$-Cobilder und (endliche) epimorphe $\mathcal{M}$-Vereinigungen. Ist dann $\mathcal{K}$ ${}^{\mathrm{loc}}Q^{\mathrm{o}}_{\mathcal{K}}(\mathcal{M})$-coklein und sind in $\mathcal{K}$ (endliche) $\mathcal{M}$-Vereinigungen beschränkt, so ist für alle kleinen (endlichen) Kategorien $\mathcal{D}$ die Einbettung $\Delta : \mathcal{K} \longrightarrow [\mathcal{D},\mathcal{K}]$ ${}^{\mathrm{loc}}Q^{\mathrm{o}}_{\Delta}(\mathcal{M})$-coklein.

Beweis: Ist $\alpha : F \longrightarrow \Delta(A)$ in ${}^{\mathrm{loc}}Q^{\mathrm{o}}_{\Delta}(\mathcal{M})$, so kann man in der nach (5.7) existierenden Zerlegung $\alpha = \mu\eta$ den Morphismus von Funktoren $\eta : F \longrightarrow H$

so wählen, daß $\eta(D)$ in einem festen Skelett von $\langle F(D), {}^{loc}Q^{o}_{K}(M)\rangle$ liegt. Wird für jedes $J \in Ob[\mathcal{D},K]$ mit $V(J)$ ein Vertretersystem der punktweisen M-Morphismen $\nu\colon J \longrightarrow \Delta(B)$ mit $B \cong \bigcup_{D \in Ob\mathcal{D}} \nu(D)$ bezeichnet, so erhält man durch Betrachtung der Zuordnung $\alpha \longmapsto (\eta,\bar{\mu})$, in der $\bar{\mu}$ den zu μ: $H \longrightarrow \Delta(A)$ gehörigen Vertreter $\bar{\mu} \in V(H)$ bezeichnet, die Behauptung.

(<u>7.9</u>) <u>THEOREM</u>: K habe Produkte und für eine Unterkategorie M K mit $Iso(K) \subset M \subset Mono(K)$ lokale, epimorphe M-Cobilder. Außerdem sei K ${}^{loc}Q^{o}_{K}(M)$-coklein. Dann ist K genau dann (endlich) covollständig, wenn in K (endliche) epimorphe M-Vereinigungen existieren und diese beschränkt sind.

Beweis: Die Bedingung ist wegen (6.1), (7.8) und der dualen Aussage von (5.8) hinreichend. Ihre Notwendigkeit beweist man mit dem Dualen von (5.9).

Durch Anwendung von (5.1) ergibt sich aus (7.9):

(<u>7.10</u>) <u>KOROLLAR</u>: Die Kategorie K sei vollständig und für eine gegen verallgemeinerte Pullbacks abgeschlossene Unterkategorie M von K mit $Egal(K) \subset M \subset Mono(K)$ M-klein und ${}^{loc}Q^{o}_{K}(M)$-coklein. Dann ist K genau dann (endlich) covollständig, wenn in K (endliche) M-Vereinigungen beschränkt sind.

Im allgemeinen wird man (7.10) für $M = Mono(K)$ anwenden : vgl. [61],(2.5). Weil dort der Fall $\mathcal{D} = \emptyset$ ausgeschlossen wurde, formulieren wir ihn hier für $M = Mono(K)$ gesondert, zumal hier die Cokleinheitsbedingung weggelassen werden kann:

(<u>7.11</u>) <u>KOROLLAR</u>: Gibt es in der vollständigen, Mono-kleinen Kategorie K

nur eine Menge nicht-isomorpher Objekte, die keine echten Unterobjekte besitzen, so hat K ein Anfangsobjekt.

Explizit findet man das Anfangsobjekt so: Mann nimmt das kleinste Unterobjekt des direkten Produktes aller nicht-isomorphen Objekte, die kein echtes Unterobjekt besitzen.
Da man den Linksadjungierten zu einem Funktor $G\colon K_1 \longrightarrow K_o$ lokal durch Angabe von Anfangsobjekten in den Kommakategorien $\langle A_o, G\rangle$, $A_o \in ObK_o$, konstruiert, folgt aus (7.11) von neuem (6.2)(b). Natürlich kann man (7.11) so formulieren, daß sich auch (6.2)(a) und (c) ergeben. Das bedeutet grob gesagt, daß (7.9) äquivalent zum Adjoint Functor Theorem ist.

Abschließend formulieren wir noch eine Umkehrung zu den anfangs bewiesenen "Liftungssätzen", die sich als Folgerung aus (6.12) ergibt und bisweilen eine explizite Konstruktion von Colimites gestattet:

(<u>7.12</u>) <u>PROPOSITION</u>: $P\colon K' \longrightarrow K$ sei rechtsadjungiert. K habe Pullbacks[1] und Egalisatoren und für $M \subset Mono(K)$ epimorphe M-Cobilder. Außerdem sei K M-klein, und die Adjunktionseinheit von P gehöre punktweise zu M. Dann ist mit K' auch K ($\mathcal{D}$-)covollständig.

Zum Beweis wendet man (6.12) auf das Dreieck

$$\begin{tikzcd} K' \arrow[rr, "P"] \arrow[d, "\Delta'"'] & & K \arrow[ddl, "\Delta"] \\ {[\mathcal{D},K']} \arrow[dr, "{[\mathcal{D},P]}"'] & & \\ & {[\mathcal{D},K]} & \end{tikzcd}$$

[1] Gemeint sind verallgemeinerte Pullbacks.

an und hat (5.8), (4.4), (3.11) und (3.2) zu beachten.

(7.13) KOROLLAR: K' sei eine Mono-reflexive Unterkategorie von K (nicht notwendig voll). K habe Pullbacks[1] und Egalisatoren und sei Mono-klein. Dann ist mit K' auch K ($\mathcal{D}$-)covollständig.

Der Beweis folgt aus (7.12) und (5.2).

Mit (7.13) ergibt sich etwa, daß in der Kategorie der Monoide die volle Unterkategorie der Malcew-Monoide, also derjenigen Monoide, die in Gruppen einbettbar sind, covollständig ist, weil in ihr Mono-reflexiv die Kategorie der Gruppen liegt.

[1] Gemeint sind verallgemeinerte Pullbacks.

IV. REGULÄRE BILDER

8. Erzeugung von Bildzerlegungen

Die zentrale Frage dieses Paragraphen ist, wann Bildzerlegungen in Kategorien längs eines Funktors geliftet werden können. Dazu werden für den allgemeinen Fall einfache notwendige Bedingungen abgeleitet und für drei wichtige Spezialfälle, nämlich monadische Funktoren, volle (co-) reflexive Unterkategorien und (Co-)Faserungen nachgewiesen, daß sie schon hinreichend sind. Wie schon in Kapitel II wird dabei keine Beschränkung auf Zerlegungen in gewisse Epi- und Monomorphismen vorgenommen.

(8.1) DEFINITION: G: $K_1 \longrightarrow K_o$ sei ein Funktor und $M_i \subset K_i$ mit $\mathrm{Iso}(K_i) \subset M_i$ und $M_i \cdot \mathrm{Iso}(K_i) \subset M_i$, i=0,1, Teilklassen. Dann erzeugt G aus M_o-Cobildern M_1-Cobilder, wenn für alle $f_1: A_1 \longrightarrow B_1$ in K_1 mit $G(f_1) = m_o e_o$, $m_o \in M_o$, $e_o \in Q_o(M_o)$, eine Faktorisierung $f_1 = m_1 e_1$ mit $m_1 \in M_1$ $e_1 \in Q_1(M_1)$ und ein $i_o \in \mathrm{Iso}(K_o)$ mit $i_o G(e_1) = e_o$, $G(m_1) = m_o i_o$ existieren.[1] Identitive Erzeugung liegt vor, wenn i_o als Identität gewählt werden kann. G erzeugt eindeutig aus M_o-Cobildern M_1-Cobilder, wenn für alle f_1, m_o, e_o wie oben eindeutig bestimmte Morphismen m_1, $e_1 \in K_1$ mit $f_1 = m_1 e_1$, $G(m_1) = m_o$ und $G(e_1) = e_o$ existieren, für die außerdem noch $m_1 \in M_1$ und $e_1 \in Q_1(M_1)$ gilt.
Man ersetzt "Cobilder" durch "epimorphe Cobilder", wenn Q durch Q^o ersetzt werden kann. Dual definiert man die Erzeugung (monomorpher) Bilder, so daß G genau dann aus M_o- Cobildern M_1-Cobilder erzeugt,

[1] Wir schreiben im folgenden oft Q_i statt Q_{K_i}, i=0,1; entsprechend bei U.

wenn G aus $Q_o(M_o)$-Bildern $Q_1(M_1)$-Bilder erzeugt, sofern M_o und M_1 abgeschlossen unter der Isbell-Korrespondenz (3.1) sind.

Man zeigt leicht, daß K_1 M_1-Cobilder hat und G sie auf M_o-Cobilder abbildet (d.h. $G(M_1) \subset M_o$, $G(Q_1(M_1)) \subset Q_o(M_o)$), wenn K_o M_o-Cobilder besitzt, aus denen G M_1-Cobilder erzeugt. Erzeugt G eindeutig aus M_o-Cobildern M_1-Cobilder, so reflektiert G M_o-Cobilder zu M_1-Cobildern (d.h. $G^{-1}(M_o) \subset M_1$, $G^{-1}(Q_o(M_o)) \subset Q_1(M_1)$).

(<u>8.2</u>) <u>LEMMA</u>: K_1 habe M_1-Cobilder, die durch G auf M_o-Cobilder abgebildet werden. Dann gelten die folgenden Inklusionen:

(1) $G^{-1}(M_o) \cap \mathrm{Init}_G(K_1) \subset M_1$, $\qquad Q_1(M_1) \subset G^{-1}(Q_o(M_o))$,

(2) $M_1 \subset G^{-1}(M_o)$, $\qquad G^{-1}(Q_o(M_o)) \cap \mathrm{Fin}_G(K_1) \subset Q_1(M_1)$.

Beweis: $M_1 \subset G^{-1}(M_o)$ und $Q_1(M_1) \subset G^{-1}(Q_o(M_o))$ folgt trivial. Sei nun $u_1 : A_1 \longrightarrow B_1$ in $\mathrm{Init}_G(K_1)$ und $G(u_1) \in M_o$. Wendet man dann G auf ein M_1-Cobild $u_1 = m_1 e_1$ von u_1 an, so erhält man $G(e_1) \in \mathrm{Iso}(K_o)$. Dann gibt es genau ein t_1 mit $m_1 = u_1 t_1$ und $G(t_1) = G(e_1)^{-1}$, und es folgt unmittelbar $t_1 e_1 = A_1$. Andererseits entnimmt man aus dem Diagramm

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "e_1"] \arrow[d, "e_1"'] & C_1 \arrow[d, "m_1"] \arrow[dl, shift right, "e_1 t_1"'] \arrow[dl, shift left, "C_1"] \\ C_1 \arrow[r, "m_1"'] & B_1 \end{tikzcd}$$

die Gleichung $e_1 t_1 = C_1$, so daß $u_1 \in M_1$ folgt. Die letzte Inklusion wird dual behandelt.

(8.2) macht deutlich, welchen "Spielraum" man für die Wahl der Zerlegungsklassen hat. In topologischen Situationen kann man beispielsweise M_1

minimal als $G^{-1}(M_o) \cap \mathrm{Init}_G(K_1)$ wählen und erhält die maximale Quotientenklasse $G^{-1}(Q_o(M_o))$. Ebenso läßt sich der andere Extremfall realisieren, bei dem in (8.2)(2) beide Male die Gleichheit steht. Im monadischen Fall hat man dagegen keine Möglichkeit, die Zerlegungsklassen in K_1 frei zu wählen. Sie ergeben sich, sofern man die Voraussetzung von (8.2) als kanonische Forderung akzeptiert, vielmehr notwendig als die Urbilder der Zerlegungsklassen in K_o. Auch die in [66] angegebene Forderung, daß der Funktor T der Monade die Klasse der Quotienten in K_o in sich abbilden muß, ist notwendig.

(<u>8.3</u>) <u>THEOREM</u>: $G: K_1 \longrightarrow K_o$ sei ein Funktor, $M_i \subset K_i$ mit $\mathrm{Iso}(K_i) \subset M_i$ und $M_i \cdot \mathrm{Iso}(K_i) \subset M_i$, i=0,1, zwei Teilklassen. Dann gilt:

(1) Aus der Aussage

(<u>i</u>) G erzeugt eindeutig aus M_o-Cobildern M_1-Cobilder.

folgt (<u>ii</u>) G erzeugt aus M_o-Cobildern M_1-Cobilder.

Hat K_o M_o-Cobilder, so ist (ii) gleichbedeutend mit

(<u>iii</u>) K_1 hat M_1-Cobilder, die durch G auf M_o-Cobilder abgebildet werden.

(2) Gilt entweder (a) G reflektiert Isomorphismen

oder (b) $G^{-1}(M_o) \subset \mathrm{Init}_G(K_1)$

oder (c) $G^{-1}(Q_o(M_o)) \subset \mathrm{Fin}_G(K_1)$,

so folgt aus (iii)

(<u>iv</u>) $M_1 = G^{-1}(M_o)$ und $Q_1(M_1) = G^{-1}(Q_o(M_o))$

und daraus

(<u>v</u>) $M_1 = G^{-1}(M_o)$ und $G(Q_1(M_1)) \subset Q_o(M_o)$.

(3) Hat G einen Linksadjungierten F und ist $T := G \cdot F$, so folgt aus (v)

(<u>vi</u>) $M_1 = G^{-1}(M_o)$ und $T(Q_o(M_o)) \subset Q_o(M_o)$.

(4) Ist G (schwach) monadisch, so gilt (vi) $\Longrightarrow$ (i) ((vi) $\Longrightarrow$ (ii)).

Hat K_o außerdem M_o-Cobilder, so sind die Aussagen (i) - (vi) ((ii)- (vi)) äquivalent.

In (8.3) kann man überall simultan "M_o-" bzw. "M_1-Cobilder" durch "epimorphe M_o-" bzw. "M_1-Cobilder" und Q durch Q^o ersetzen.

Beweis: (1) ist trivial. (2) Ist $x_1 = m_1 e_1$ ein M_1-Cobild, so folgt aus $G(x_1) \in M_o$ bzw. $G(x_1) \in Q_o(M_o)$ $G(e_1)$ bzw. $G(m_1) \in \mathrm{Iso}(K_o)$; daraus folgt im Falle (a) sofort und im Falle (b) (dual (c)) aus (8.2) bzw. (2.17) $x_1 \in M_1$ bzw. $x_1 \in Q_1(M_1)$. (3) Aus $G(M_1) \subset M_o$ folgt $F(Q_o(M_o)) \subset Q_1(M_1)$ (vgl. [59] oder (3.2)(6)) und daraus $T(Q_o(M_o)) \subset G(Q_1(M_1)) \subset Q_o(M_o)$. (4) wird wie in [66] bewiesen, wobei zu vermerken ist, daß man wegen der Eindeutigkeit der Isbell-Diagonalen auf eine Beschränkung auf Zerlegungen in Epi- und Monomorphismen verzichten kann.

(8.4) KOROLLAR: K_o habe für $M_o \subset \mathrm{Mono}(K_o)$ epimorphe M_o-Cobilder, aus denen der prämonadische Funktor $G: K_1 \longrightarrow K_o$ epimorphe $M_1 = G^{-1}(M_o)$-Cobilder erzeuge. Dann ist K_1 M_1-klein bzw. $Q_1^o(M_1)$-coklein, sofern K_o M_o-klein bzw. $Q_o^o(M_o)$-coklein ist.

Beweis: Man faktorisiert G über den Vergleichsfunktor: $G = G^t \circ K$. Weil G Isomorphismen reflektiert, folgt (8.4) nach (8.3) und (2.2) zunächst für G^t und dann für G.

(8.5) PROPOSITION: Eine (treue) M-Faserung $P: K' \longrightarrow K$ erzeugt für eine Teilklasse $M \subset K$ mit $\mathrm{Iso}(K) \subset M$ und $M \cdot \mathrm{Iso}(K) \subset M$ aus (epimorphen) M-Cobildern (epimorphe) $M' := P^{-1}(M) \cap \mathrm{Init}_P(K')$-Cobilder. Hat K (epimorphe) M-Cobilder, so ist $Q_{K'}^{(o)}(M') = P^{-1}(Q_K^{(o)}(M))$.

Beweis: Ist $f' \in K'$ und $P(f') = me$ ein M-Cobild, so faktorisiert f' über eine P-initiale Liftung m' von m. Die Gleichung für die Quotientenklassen ergibt sich dann mit (3.11).

Bei der Behandlung voller Unterkategorien kann man sowohl (8.3) als auch (8.5) verwenden.

(8.6) PROPOSITION: $K' \subset K$ sei eine volle Unterkategorie, $M \subset K$ mit $\mathrm{Iso}(K) \subset M$ und $M \cdot \mathrm{Iso}(K) \subset M$ eine Teilklasse. Gilt eine der folgenden Bedingungen (a) - (f), so erzeugt der Inklusionsfunktor aus (epimorphen) M-Cobildern $(M \cap K')$-Cobilder, und zwar eindeutig, wenn K' Iso-abgeschlossen ist:

(a) K' ist schwach M-abgeschlossen in K.

(b) K' ist schwach $Q_K^{(o)}(M)$-coabgeschlossen in K.

(c) K' ist $Q_K(M)$-reflexiv in K.

(d) K' ist M-coreflexiv in K.

(e) K' ist reflexiv in K und $Q_{K'}^{(o)}(M \cap K') \subset Q_K^{(o)}(M)$.

(f) K' ist reflexiv in K und $R(Q_K^{(o)}(M)) \subset Q_K^{(o)}(M)$ (R Reflexionsfunktor).

Dabei ist stets $Q_{K'}^{(o)}(M \cap K') = Q_K^{(o)}(M) \cap K'$, wenn K (epimorphe) M-Cobilder hat.

Beweis: (a) folgt aus (8.5), weil der Inklusionsfunktor im Falle (a) eine treue M-Faserung ist. (c) folgt aus (a) mit (6.4)(2), und (b), (d) behandelt man dual. Weil volle und treue Funktoren, die einen Linksadjungierten besitzen, schwach monadisch sind, folgen (e) und (f) aus (8.3)(v), (vi). Die Gleichung für die Quotientenklassen folgt wieder aus (3.11). (Auf die Dualisierung der Aussagen (e) und (f) wurde verzichtet.)

9. Reguläre Bilder

Ein Funktor G: $K_1 \longrightarrow K_o$ hat reguläre Bilder, wenn er monomorphe Reg-Epi(K_1)-Bilder hat; dual: reguläre Cobilder. K hat genau dann reguläre Bilder, wenn jeder Morphismus über einen regulären Epimorhismus und einen anschließenden Monomorphismus faktorisiert, weil (Reg-Epi(K), Mono(K)) ein Isbell-Zerlegungspaar ist. Es gilt dann insbesondere

$$\text{Reg-Epi}(K) = Q^{\circ}_{K}(\text{Mono}(K)) = \text{Ext-Epi}(K).$$

Hat K Kernpaare, so ist stets

$$\text{Reg-Epi}(K) = \text{Co-Egal}(K) \ .$$

Mit Surj(K) wird die Klasse der universellen Epimorphismen in K bezeichnet (vgl. [59]). Für eine Teilklasse $E \subset K$ gilt genau dann $E \subset$ Surj(K), wenn es eine universelle Teilklasse $E' \subset K$ mit $E \subset E' \subset$ Epi(K) gibt.

(9.1) THEOREM:

(1) Hat K Pullbacks und ist Reg-Epi(K) $\subset$ Surj(K), so ist Reg-Epi(K) eine Unterkategorie von K.

(2) Hat K Kernpaare und Coegalisatoren zu Kernpaaren, so hat K genau dann reguläre Bilder, wenn Reg-Epi(K) eine Unterkategorie von K ist.

(3) Hat K Produkte, so sind äquivalent:

- (i) K hat reguläre Bilder.
- (ii) Für alle kleinen $\mathcal{D}$ hat $\Delta_{\mathcal{D}}$: $K \longrightarrow [\mathcal{D},K]$ reguläre Bilder.

Ist K außerdem Reg-Epi-coklein, so ist zu (i), (ii) noch äquivalent:

- (iii) K ist regulär (s. [32]), d.h. für alle $\mathcal{D}$ hat $\Delta_{\mathcal{D}}$ reguläre Bilder.

(4) Hat K endliche Potenzen und Kernpaare und ist K Egal-klein, so auch Reg-Epi-coklein.

Beweis: Zum Nachweis von (1) vgl. [21] oder [60]. (2) f: A $\longrightarrow$ B sei in K, (k_o,k_1) ein Kernpaar von f und c ein Coegalisator von (k_o,k_1). Dann ist der durch mc = f bestimmte Morphismus m monomorph. Aus einer Faktorisierung m = gc' mit einem Coegalisator c' folgt nämlich, daß (k_o,k_1) Kernpaar zu c'c, also c'c Coegalisator von (k_o,k_1) ist, wenn Reg-Epi(K) kompositiv ist. Damit sind c und c'c isomorph in <A,Reg-Epi(K)>, also c' ein Isomorphismus. Die Notwendigkeit der angegebenen Bedingung ist klar. (3) folgt aus (5.10). (4) Das Kernpaar eines regulären Epimorphismus e: A $\longrightarrow$ B kann man als Egalisator von AπA darstellen.

Weil es nach (9.1)(1) wichtig ist, eine universelle Teilklasse von Epimorphismen zu finden, die alle regulären Epimorphismen enthält, geben wir hier noch zwei Kriterien für die Existenz einer solchen Morphismenklasse an. Trivial ist die

(9.2) PROPOSITION: G: $K_1 \longrightarrow K_o$ sei ein Funktor, $E_o \subset K_o$ eine Teilklasse. Dann gilt:

(1) Erhält G (verallgemeinerte) Pullbacks und ist E_o in K_o (stark) universell, so ist $G^{-1}(E_o)$ in K_1 (stark) universell.

(2) Ist G für eine kleine Kategorie $\mathcal{D}$ $\mathcal{D}$-stetig, so überträgt sich Abgeschlossenheit gegenüber $\mathcal{D}$-Limites von E_o auf $G^{-1}(E_o)$.

Wie in [60] werde für $X \subset \text{Ob}K$ im folgenden mit $C(X)$ die Klasse aller f: A $\longrightarrow$ B in K mit der folgenden Eigenschaft bezeichnet: Für jedes $X \in X$ und jedes y:X $\longrightarrow$ B gibt es ein x:X $\longrightarrow$ A mit fx = y . [1]

Die folgenden Eigenschaften bestätigt man ohne Schwierigkeiten:

(1) $C(X)$ ist eine stark universelle Unterkategorie von K mit Retr(K) $\subset$ $C(X)$. Ist X eine Generatorenmenge, so ist $C(X) \subset$ Epi(K).

[1] Der Operator C ist Bestandteil einer Galoiskorrespondenz zwischen (verallgemeinerten) projektiven Objekten und "cofortsetzbaren" Morphismen (vgl. [59], [60]).

(2) Die Morphismen in $C(X)$ sind abgeschlossen gegen direkte Produkte.

(3) Besitzt G: $K_1 \longrightarrow K$ einen Linksadjungierten F, so ist $C(F(X)) = G^{-1}(C(X))$.

(9.3) PROPOSITION: Für eine Teilklasse $E \subset K$ sei G eine E-projektive Generatorenmenge. Dann existiert eine stark universelle Unterkategorie $E' \subset K$ mit $E \subset E' \subset \mathrm{Epi}(K)$, deren Morphismen gegen Bildung direkter Produkte abgeschlossen sind. Insbesondere ist $E \subset \mathrm{Surj}(K)$. Ist G: $K_1 \longrightarrow K$ treu und besitzt G einen Linksadjungierten F, so ist F(G) eine $G^{-1}(E)$-projektive Generatorenmenge und $G^{-1}(E) \subset \mathrm{Surj}(K_1)$.

Beweis: Für E' wählt man $C(G)$. Die Aussage für F(G) verifiziert man unmittelbar.

(9.4) KOROLLAR: Hat K Pullbacks, Coegalisatoren zu Kernpaaren und eine Reg-Epi-projektive Generatorenmenge, so hat K reguläre Bilder.

Wir übertragen jetzt die Sätze aus §8 auf den Fall regulärer Bilder. Zunächst notieren wir das

(9.5) LEMMA: G: $K_1 \longrightarrow K_o$ sei ein Funktor.

(1) Für treues G gilt

$$\text{Reg-Epi}(K_1) \cap G^{-1}(\mathrm{Epi}(K_o)) \subset \mathrm{Fin}_G(K_1).$$

(2) Hat G einen Linksadjungierten oder hat K_1 Kernpaare, die von G erhalten werden, so ist

$$\mathrm{Fin}_G(K_1) \cap G^{-1}(\text{Reg-Epi}(K_o)) \subset \text{Reg-Epi}(K_1).$$

(3) Gelten die Voraussetzungen von (1) und (2), so ist

$$\text{Reg-Epi}(K_1) \cap G^{-1}(\text{Reg-Epi}(K_o)) = \mathrm{Fin}_G(K_1) \cap G^{-1}(\text{Reg-Epi}(K_o)),$$

und wenn G noch reguläre Epimorphismen erhält, so ist

$$\text{Reg-Epi}(K_1) = \mathrm{Fin}_G(K_1) \cap G^{-1}(\text{Reg-Epi}(K_o)).$$

(9.6) PROPOSITION: G: $K_1 \longrightarrow K_o$ sei schwach monadisch und K_o habe reguläre Bilder. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) K_1 hat reguläre Bilder, die von G erzeugt werden.

(ii) G erhält und reflektiert reguläre Epimorphismen.

(iii) G erhält reguläre Epimorphismen.

(iv) Der Endofunktor T der durch G induzierten Monade erhält reguläre Epimorphismen.

Gilt eine dieser Aussagen, so sind reguläre Epimorphismen in K_1 (stark) universell bzw. gegen D-Limites abgeschlossen, wenn dies in K_o der Fall ist. Außerdem überträgt sich Reg-Epi-Cokleinheit.

Beweis: (i) $\Longrightarrow$ (ii) folgt aus (8.3)(1),(2), und (ii) $\Longrightarrow$ (iii) ist trivial. Zu (iii) $\Longrightarrow$ (iv) ist zu bemerken, daß ein Linksadjungierter stets reguläre Epimorphismen erhält. (iv) $\Longrightarrow$ (i): Nach (8.3)(4) hat K_1 monomorphe $G^{-1}(\text{Reg-Epi}(K_o))$-Bilder, so daß nach dem Dualen von (3.2)(3) $\text{Reg-Epi}(K_1) \subset G^{-1}(\text{Reg-Epi}(K_o))$ gilt. Wegen $T(\text{Reg-Epi}(K_o)) \subset \mathrm{Epi}(K_o)$ ist nach (2.2) außerdem $G^{-1}(\text{Reg-Epi}(K_o)) \subset \mathrm{Fin}_G(K_1)$, so daß mit (9.5)(3) $G^{-1}(\text{Reg-Epi}(K_o)) = \text{Reg-Epi}(K_1)$ folgt. Der Rest folgt aus (9.2) und (2.2).

(9.7) PROPOSITION: Eine treue Cofaserung P: $K' \longrightarrow K$ mit Linksadjungiertem erzeugt reguläre Bilder. Hat K reguläre Bilder, so ist $\text{Reg-Epi}(K') = P^{-1}(\text{Reg-Epi}(K)) \cap \mathrm{Fin}_P(K')$, und K' ist Reg-Epi-coklein, wenn K es ist.

Beweis: Nach der zu (8.5) dualen Aussage erzeugt P aus regulären Bildern monomorphe $P^{-1}(\text{Reg-Epi}(K)) \cap \text{Fin}_p(K')$-Bilder. Wegen $P^{-1}(\text{Reg-Epi}(K)) \cap \text{Fin}_p(K') \subset \text{Reg-Epi}(K')$ (vgl. (9.5)(2)) und $P^{-1}(\text{Mono}(K)) = \text{Mono}(K')$ folgen unter Beachtung von (3.11) und (2.2) alle Behauptungen.

(9.8) PROPOSITION: Die volle Unterkategorie $K' \subset K$ erfülle eine der folgenden Bedingungen:

(a) K' ist reflexiv und schwach Mono-abgeschlossen in K.

(b) K' ist reflexiv und schwach Reg-Epi-coabgeschlossen in K.

(c) K' ist Reg-Epi-reflexiv in K.

(d) K' ist Epi-coreflexiv in K.

(e) K' ist reflexiv, und reguläre Epimorphismen in K' sind auch reguläre Epimorphismen in K.

(f) K' ist reflexiv, und für den Reflektor R ist $R(\text{Reg-Epi}(K)) \subset \text{Reg-Epi}(K)$.

Dann erzeugt der Inklusionsfunktor reguläre Bilder. Hat K reguläre Bilder, so ist $\text{Reg-Epi}(K') = \text{Reg-Epi}(K) \cap K'$ und $\text{Mono}(K') = \text{Mono}(K) \cap K'$. Außerdem ist mit K auch K' Mono-klein bzw. Reg-Epi-coklein.

Beweis: Man wendet (8.6) an und hat in den Fällen (a) - (c) zu beachten, daß wegen (9.5)(2) $\text{Reg-Epi}(K) \cap K' \subset \text{Reg-Epi}(K')$ gilt. Zu (d) ist zu bemerken daß K' als Epi-coreflexive Unterkategorie auch Mono-coreflexiv ist und somit (8.6)(d) anwendbar ist. Man hat sich dann nur noch davon zu vergewissern, daß die Epimorphie des Coreflexionsmorphismus die Inklusion $\text{Reg-Epi}(K) \cap K' \subset \text{Reg-Epi}(K')$ zur Folge hat. Zu (e), (f) benutzt man (8.6)(f). Die angegebenen Gleichungen folgen wieder aus (3.11).

Wir fassen im folgenden die vorangehenden Sätze so zusammen, daß dadurch eine große Klasse konkreter Kategorien erfaßt wird. Dabei bezeichnen wir für eine Kardinalzahl $n \geq 1$ mit Me^n das n-fache Produkt der Kategorie der Mengen mit sich selbst und mit Me_n die Kategorie der n-fach punktierten Mengen.[1] Für n = 1 wird insbesondere mit Me^1 die Kategorie Me und mit Me_1 die Kategorie der punktierten Mengen erfaßt.

(9.9) THEOREM: $G\colon K \longrightarrow M$ mit $M = Me^n$ oder Me_n sei ein endliches Kompositum $G = G_0 \circ G_1 \circ \ldots \circ G_k$, derart daß G_0 schwach monadisch und G_i für $1 \leq i \leq k$ entweder eine Top-Kategorie oder die Inklusion einer vollen Unterkategorie ist, die eine der Bedingungen (a) - (f) in (9.8) erfüllt. Dann gilt:

(1) K ist vollständig und covollständig.

(2) K hat reguläre Bilder, die von G erzeugt werden.

(3) Es ist $\text{Reg-Epi}(K) = \text{Ext-Epi}(K)$ eine Unterkategorie von K mit $\text{Reg-Epi}(K) \subset \text{Surj}(K)$.

(4) G ist treu, reflektiert Mono- und Epimorphismen und erhält Mono- und reguläre Epimorphismen.

(5) K ist Mono-klein und Ext-Epi-coklein.

(6) K hat einen Generator.

Beweis: In (1) ist nur die Existenz von Colimites problematisch, die aber sofort aus (7.4), (7.6) und (5) folgt. (2) - (5) ergibt sich im wesentlichen aus (9.6) - (9.8). Dabei ist (9.6)(iv) wegen $\text{Reg-Epi}(M) = \text{Retr}(M)$ trivial erfüllt. In (3) ist dann nur noch $\text{Reg-Epi}(K) \subset \text{Surj}(K)$ zu zeigen. Abgesehen vom Fall (9.8)(d) folgt das aus (9.2)(1). Sonst muß man das folgende einfache Lemma anwenden:

(9.10) LEMMA: Ist K' eine volle, Epi-coreflexive Unterkategorie und $E \subset \text{Surj}(K)$ eine Teilklasse, so ist $E \cap K' \subset \text{Surj}(K')$, sofern K Pullbacks hat.

[1] Me_n ist die Kommakategorie $\langle n, Me \rangle$.

Zu zeigen bleibt (9.9)(6): "Der" in $\mathcal{M}$ existierende Generator wird durch die Linksadjungierten der G_i - soweit existent - erhalten, weil die G_i treu sind. Lediglich der Fall (9.8)(d) ist wieder gesondert zu betrachten. Dort aber erhält der Coreflektor Generatoren, weil der Coreflexionsmorphismus epimorph ist.

Die Vielzahl der Anwendungsmöglichkeiten für (9.9) legt den Versuch nahe, einen allgemeinen Liftungssatz für reguläre Bildzerlegungen zu beweisen. Als Vorbereitung dazu dient die

<u>(9.11)</u> <u>PROPOSITION</u>: $\mathcal{K}_1$ habe Produkte und Kernpaare, die von $G\colon \mathcal{K}_1 \longrightarrow \mathcal{K}_o$ erhalten werden. Außerdem besitze $\mathcal{K}_1$ Coegalisatoren zu Kernpaaren und sei Egal-klein. Dann gibt es zu jedem Coegalisator $c_o\colon G(A_1) \longrightarrow B_o$ in $\mathcal{K}_o$, $A_1 \in \mathrm{Ob}\mathcal{K}_1$, einen Coegalisator $c_1\colon A_1 \longrightarrow B_1$ in $\mathcal{K}_1$ und ein $x_o\colon B_o \longrightarrow G(C_1)$ mit $x_o c_o = G(c_1)$, so daß die folgende universelle Eigenschaft gilt:

Für alle $d_1\colon A_1 \longrightarrow D_1$ in $\mathcal{K}_1$ und $y_o\colon B_o \longrightarrow G(D_1)$ in $\mathcal{K}_o$ mit

(9.11.1) $y_o c_o = G(d_1)$ gibt es genau ein $t_1\colon C_1 \longrightarrow D_1$ mit $t_1 c_1 = d_1$ und $G(t_1)\, x_o = y_o$.

$$\begin{tikzcd}
& G(C_1) \arrow[dd, dashed, "G(t_1)"] & \\
G(A_1) \arrow[ur, "G(c_1)"] \arrow[rr, "c_o"] \arrow[dr, "G(d_1)"'] & & B_o \arrow[ul, "x_o"'] \arrow[dl, "y_o"] \\
& G(D_1) &
\end{tikzcd}$$

Beweis: Ist c_o Coegalisator zu f_o, g_o, so betrachtet man ein System (r_1^i, s_1^i), $i \in I$, nicht-isomorpher Kernpaare mit Cobereich A_1 in $\mathcal{K}_1$, derart daß es ein j_o^i in $\mathcal{K}_o$ mit $G(r_1^i)\, j_o^i = f_o$ und $G(s_1^i)\, j_o^i = g_o$ gibt. Aufgrund der Existenz von Produkten, deren Erhaltung durch G und der Egal-Kleinheit ist I eine nicht-leere Menge, so daß man den Durchschnitt (r_1, s_1) der Kernpaare (r_1^i, s_1^i) bilden kann (vgl. [60]). Dann gibt es ein j_o mit $G(r_1)\, j_o = f_o$, $G(s_1)\, j_o = g_o$, so daß es zu c_1, dem Coegalisator zu r_1, s_1, ein x_o mit $x_o c_o = G(c_1)$ gibt, weil c_o Coegalisator zu f_o, g_o ist. Zum Beweis der universellen Eigenschaft bildet man das Kernpaar zu d_1, das isomorph zu einem der (r_1^i, s_1^i) sein muß. Daraus folgt $d_1 r_1 = d_1 s_1$ so daß es genau ein t_1 mit $t_1 c_1 = t_1$ gibt. Aus der Epimorphie von c_o folgt dann $y_o = G(t_1)\, x_o$.

<u>(9.12)</u> <u>THEOREM</u>: $\mathcal{K}_1$ sei vollständig und Mono-klein. Außerdem habe $\mathcal{K}_1$ Coegalisatoren zu Kernpaaren oder sei Ext-Epi-coklein. $G\colon \mathcal{K}_1 \longrightarrow \mathcal{K}_o$ sei treu und stetig, und $\mathcal{K}_o$ habe reguläre Bilder. Dann hat $\mathcal{K}_1$ genau dann reguläre Bilder, die von G erzeugt werden, wenn G reguläre Epimorphismen erhält.

Beweis: Nach (5.2) hat $\mathcal{K}_1$ epimorphe Mono-Cobilder, so daß es genügt, $\text{Ext-Epi}(\mathcal{K}_1) \subset \text{Reg-Epi}(\mathcal{K}_1)$ nachzuweisen. Ist $d_1\colon A_1 \longrightarrow B_1$ in $\text{Ext-Epi}(\mathcal{K}_1)$ und $G(d_1) = y_o c_o$ eine reguläre Bildzerlegung, so gibt es nach (9.11) und (7.6)(b) einen regulären Epimorphismus $c_1\colon A_1 \longrightarrow C_1$ in $\mathcal{K}_1$ und ein x_o in $\mathcal{K}_o$ mit $x_o c_o = G(c_1)$. Dabei ist zu bemerken, daß $c_o \in \text{Co-Egal}(\mathcal{K}_o)$ ist, weil es Coegalisator des G-Bildes des Kernpaares von d_1 ist. Nun gibt es ein $t_1\colon C_1 \longrightarrow B_1$ mit $t_1 c_1 = d_1$ und $G(t_1)\, x_o = y_o$. Mit y_o ist auch $x_o \in \text{Mono}(\mathcal{K}_o)$ und wegen $G(c_1) \in \text{Ext-Epi}(\mathcal{K}_o)$ sogar Isomorphismus. Weil G treu ist und d_1 ein extremer Epimorphismus, ist dann auch t_1 Isomorphismus und damit $d_1 \in \text{Reg-Epi}(\mathcal{K}_1)$.

Die Bedingung in (9.12), daß G reguläre Epimorphismen erhält, ist wesentlich. Das zeigt beispielsweise der Vergißfunktor von den kleinen Kategorien nach $\mathcal{M}e$, der sogar einen Linksadjungierten besitzt. Bis auf die Erhaltung regulärer Epimorphismen sind hier alle Voraussetzungen von (9.12) erfüllt, jedoch existieren in $\mathcal{C}at$ keine regulären Bilder (vgl. (A.2)).

Hat eine Kategorie eine regulär-projektive Generatorenmenge G, so ist der durch $G(u) := \coprod_{X \in G} K(X,u)$ für alle $u \in K$ definierte Funktor $G: K \longrightarrow \mathcal{M}e$ treu und stetig, und G erhält reguläre Epimorphismen. Abgesehen von der Vollständigkeit und Mono-Kleinheit ergibt sich also aus (9.12) ein weiterer Beweis für (9.4).

Es sei noch darauf aufmerksam gemacht, daß man entsprechend (5.11) die Voraussetzung "K_1 sei vollständig und Mono-klein" in (9.12) durch "K_1 sei endlich vollständig und Mono-endlich" ersetzen kann.

Abschließend soll jetzt untersucht werden, wann in einer Kategorie reguläre Bilder zugleich reguläre Cobilder sind. Eine hinreichende Bedingung dafür ist die sogenannte <u>Durchschnittseigenschaft amalgamierter Summen</u> : Pushouts von Monomorphismen sind Pullbacks. Diese wollen wir zunächst wie in [24] ein wenig abschwächen:

(<u>9.13</u>) <u>DEFINITION</u>: Ein Objekt $B \in \mathrm{Ob}K$ heißt <u>nicht ausgeartet</u>, wenn für $m \in \mathrm{Mono}(K) \setminus \mathrm{Iso}(K)$ mit $\mathrm{Cob}(m) = B$ und jedes Cokernpaar (j_o, j_1) von m $j_o \neq j_1$ folgt.

Hat K die Durchschnittseigenschaft amalgamierter Summen, so ist jedes Objekt in K nicht ausgeartet. Das zeigt, daß - von der Existenz von Cokernpaaren abgesehen - nur ausgeglichene Kategorien die Durchschnittseigenschaft haben können, denn es gilt:

(<u>9.14</u>) <u>LEMMA</u>: Besitzt K Cokernpaare zu Monomorphismen, so ist $B \in \mathrm{Ob}K$ genau dann nicht ausgeartet, wenn jeder Epimorphismus mit Cobereich B ein extremer Epimorphismus ist.

K ist also genau dann ausgeglichen, wenn in K jedes Objekt nicht ausgeartet ist. Daraus ergibt sich beispielsweise ein Beweis für die Surjektivitat der Epimorphismen in $\mathcal{G}rp$ und ebenso in der Kategorie der Boole'schen Algebren.

Wir benötigen jetzt noch zwei weitere Lemmata, die von Dwinger [12] und Ringel [64] bewiesen wurden:

(<u>9.15</u>) <u>LEMMA</u>: Zu jedem $m \in \mathrm{Mono}(K) \setminus \mathrm{Iso}(K)$ mit $\mathrm{Cob}(m) = B \in \mathrm{Ob}K$ existiere ein injektives Objekt C und Monomorphismen $j_o, j_1 : B \longrightarrow C$ mit $j_o m = j_1 m$ und $j_o \neq j_1$. Dann sind Pushouts von Monomorphismen in K Pullbacks, sofern Pullbacks von Monomorphismen in K existieren.

Zum Beweis bestätigt man zunächst, daß Mono(K) <u>längs</u> Mono(K) <u>couniversell</u> ist, d.h. daß für jeden Pushout (q_o, q_1) zweier Monomorphismen (m_o, m_1) mit gemeinsamem Bereich q_o und q_1 wieder monomorph sind. Sodann wendet man die Voraussetzung von (9.15) auf den eindeutig bestimmten Monomorphismus m an, der das Pushout (q_o, q_1) mit dem Pullback (p_o, p_1) zu (q_o, q_1) vergleicht, und erhält leicht, daß m Isomorphismus ist.

(9.15.1)
$$\begin{tikzcd}
& & \cdot \arrow[dr, "q_o"] & \\
\cdot \arrow[urr, "m_o"] \arrow[drr, "m_1"'] \arrow[r, dashed, "m"] & \cdot \arrow[ur, "p_o"'] \arrow[dr, "p_1"] & & \cdot \\
& & \cdot \arrow[ur, "q_1"'] &
\end{tikzcd}$$

(<u>9.16</u>) <u>LEMMA</u>: K sei eine ausgeglichene Kategorie mit Pullbacks und

Pushouts zu Monomorphismen, und Mono(K) sei längs Mono(K) couniversell in K. Dann sind Pushouts von Monomorphismen Pullbacks in K.

Zum Beweis zeigt man, daß m in (9.15.1) epimorph ist: vgl. [64]. Zusammenfassend ergibt sich mit (9.13) - (9.16):

(9.17) THEOREM: K besitze Cokernpaare zu Monomorphismen.

(1) Dann gelten für die Aussagen

(i) In K sind Pushouts von Monomorphismen Pullbacks.

(ii) Mono(K) = Reg-Mono(K).

(iii) Mono(K) = Ext-Mono(K).

(iv) K ist ausgeglichen.

(v) Jedes Objekt in K ist nicht ausgeartet.

die Implikationen (i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii) $\Longleftrightarrow$ (iv) $\Longleftrightarrow$ (v).

(2) Gilt die Aussage

(vi) In K ist Mono(K) längs Mono(K) couniversell.

und existieren in K Pullbacks und Pushouts zu Monomorphismen, so sind (i) - (v) äquivalent.

(3) Hat K genügend viele Injektive und Pullbacks zu Monomorphismen, so sind Monomorphismen couniversell in K (so daß also (vi) gilt), und (i) - (v) sind äquivalent.

(9.18) KOROLLAR: Die ausgeglichene Kategorie K habe Pullbacks und Pushouts zu Monomorphismen. Außerdem habe K genügend viele Injektive, oder es sei Mono(K) längs Mono(K) couniversell. Besitzt dann K reguläre Bilder, so auch reguläre Cobilder, und beide stimmen überein, d.h.

$$\mathrm{Epi}(K) = \text{Reg-Epi}(K) \quad \text{und} \quad \mathrm{Mono}(K) = \text{Reg-Mono}(K) \ ;$$

außerdem sind Pushouts zu Monomorphismen Pullbacks.

Für jeden Ring R ist die Kategorie der R-(Links-)Moduln ein Anwendungsbeispiel für (9.18), weil sie bekanntlich genügend viele Injektive hat. In $\mathcal{G}rp$ sind die Monomorphismen nicht couniversell (deshalb hat $\mathcal{G}rp$ nicht genügend viele Injektive!), wohl aber längs Mono($\mathcal{G}rp$), so daß (9.18) auch hier anwendbar ist.

10. Charakterisierung reflexiver Unterkategorien monadischer Kategorien

Ausgangspunkt für die Charakterisierung ist die Beschreibung prämonadischer Funktoren. Längs derartiger Funktoren wurden bereits in (7.4) und (8.4) die Existenz von Limites und Colimites sowie Kleinheit und Cokleinheit "geliftet". Unmittelbar aus der Definition (1.7) entnimmt man, daß ein prämonadischer Funktor treu ist und folglich Mono- und Epimorphismen reflektiert. Außerdem reflektiert er Isomorphismen und Limites. Aus der folgenden Charakterisierung entnimmt man zusätzlich, daß er Retraktionen in Coegalisatoren reflektiert.

(10.1) PROPOSITION: $G\colon K_1 \longrightarrow K_0$ besitze einen Linksadjungierten F mit Coeinheit $\varepsilon\colon F\circ G \longrightarrow K_1$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(i) G ist prämonadisch.

(ii) G reflektiert rechtsinvertierbare Coegalisatoren, d.h. für alle $f_1, g_1, c_1 \in K_1$ mit $c_1 f_1 = c_1 g_1$, für die $G(c_1)$ Retraktion und Coegalisator zu $G(f_1), G(g_1)$ ist, ist c_1 Coegalisator von f_1, g_1.

(iii) Für alle $A_1 \in \mathrm{Ob}K_1$ ist $\varepsilon(A_1)$ Coegalisator zu $F\circ G\circ\varepsilon(A_1)$, $\varepsilon\circ F\circ G(A_1)$.

(iv) ε ist punktweise ein Coegalisator.

(v) ε ist punktweise ein regulärer Epimorphismus.

(vi) G ist treu und ε punktweise G-final.

(vii) G reflektiert Retraktionen in Coegalisatoren.

(viii) G reflektiert Retraktionen in reguläre Epimorphismen.

(ix) G ist treu und reflektiert Retraktionen in G-finale Morphismen.

Beweis (vgl. [66], [67], [70]): (i) $\Rightarrow$ (ii): Zu h_1 mit $h_1 f_1 = h_1 g_1$ gibt es genau ein j_o mit $j_o G(c_1) = G(h_1)$. Weil $G(c_1)$ eine Retraktion ist, induziert j_o einen Morphismus $\bar{j}_o\colon K(\mathrm{Cob}(c_1)) \longrightarrow K(\mathrm{Cob}(h_1))$, wobei K der Vergleichsfunktor (1.5) ist. Deshalb existiert genau ein j_1 mit $K(j_1) = \bar{j}_o$, also $G(j_1) = j_o$ und damit $j_1 c_1 = h_1$. (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (v) ist trivial und (v) $\Rightarrow$ (vi) folgt aus (9.5)(1). (vi) $\Rightarrow$ (i): Mit G ist auch K treu. Für $\bar{h}_o\colon K(A_1) \longrightarrow K(B_1)$ folgt $h_o G(\varepsilon(A_1)) = G(\varepsilon(B_1)\, F(h_o))$, so daß es ein $h_1\colon A_1 \longrightarrow B_1$ mit $G(h_1) = h_o$, also $K(h_1) = \bar{h}_o$ gibt. Zum Nachweis der Äquivalenz von (vii), (viii), (ix) zu den vorangehenden Aussagen wendet man das folgende Lemma an:

(<u>10.2</u>) <u>LEMMA</u>: Ist für $c_1\colon B_1 \longrightarrow C_1$ in K_1 $G(c_1)$ eine Retraktion, so gibt es $f_1, g_1\colon A_1 \longrightarrow B_1$ in K_1, derart daß $c_1 f_1 = c_1 g_1$ und $G(c_1)$ Coegalisator zu $G(f_1)$, $G(g_1)$ ist.

(<u>10.3</u>) <u>KOROLLAR</u>: Ist $G\colon K_1 \longrightarrow K_o$ prämonadisch, so ist $\mathrm{Mono}(K_1) \subset \mathrm{Init}_G(K_1)$. Insbesondere ist mit K_o auch K_1 Mono-klein.

Der Beweis folgt aus (3.8) und (10.1)(v), kann aber auch leicht direkt geführt werden.

(<u>10.4</u>) <u>KOROLLAR</u>: $H\colon K_2 \longrightarrow K_1$ und $G\colon K_1 \longrightarrow K_o$ seien rechtsadjungierte

Funktoren. Ist $G \circ H$ prämonadisch, so auch H. Ist $\mathrm{Reg\text{-}Epi}(K_2)$ eine Unterkategorie von K_2, so ist mit G und H auch $G \circ H$ prämonadisch.

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus der Darstellung der Coeinheit von $G \circ H$ und (1o.1)(v).

(<u>10.5</u>) <u>PROPOSITION</u>: $G\colon K_1 \longrightarrow K_o$ besitze einen Linksadjungierten F, und t sei die induzierte Monade über K_o. G habe für $M_1 \subset \mathrm{Mono}(K_1)$ M_1-Cobilder.[1] Dann gilt für den Vergleichsfunktor $K\colon K_1 \longrightarrow K_o^t$:

(1) Ist $G(Q_{K_1}(M_1)) \subset Q_{K_o}(M_o)$ für eine Teilklasse $M_o \subset K_o$ mit der Eigenschaft, daß aus $m_o n_o \in M_o$, $m_o \in \mathrm{Mono}(K_o)$ stets $n_o \in M_o$ folgt, so erzeugt K M_1-Morphismen aus $G^{t^{-1}}(M_o)$-Morphismen.

(2) Hat G sogar epimorphe M_1-Cobilder, so erzeugt K Egalisatoren (als Limites), wenn $M_1 \subset \mathrm{Init}_G(K_1)$ gilt oder K Egalisatoren (als Limites) reflektiert, also insbesondere, wenn G prämonadisch ist.

Beweis: Zu $\bar{m}_o\colon (A_o, a_o) \longrightarrow K(A_1) = (G(A_1), G\circ\varepsilon(A_1))$ in $G^{t^{-1}}(M_o)$ betrachtet man eine Zerlegung $m_o = G(m_1)\, e_o$ mit $m_1 \in M_1$, $e_o \in Q_G(M_1)$. e_o bestimmt den $Q_{K_1}(M_1)$-Morphismus $e_1 = \varepsilon(B_1)\, F(e_o)$, und wegen $G(m_1) \in \mathrm{Mono}(K_o)$ folgt $e_o a_o = G(e_1)$. Deshalb liegt ein Morphismus $\bar{e}_o\colon (A_o, a_o) \longrightarrow K(B_1)$ in K_o^t vor.

(1)
$$
\begin{tikzcd}
& G\circ F\circ G(B_1) \arrow[rd, "G\circ F\circ G(m_1)"] \arrow[d, shift right, "G\circ\varepsilon(B_1)"'] & \\
G\circ F(A_o) \arrow[ru, "G\circ F(e_o)"] \arrow[rr, "G\circ F(m_o)"] \arrow[rd, "G(e_1)"] \arrow[dd, shift right, "a_o"'] & G(B_1) \arrow[u, shift right, "\eta\circ G(B_1)"'] \arrow[rdd, "G(m_1)"] & G\circ F\circ G(A_1) \arrow[dd, shift right, "G\circ\varepsilon(A_1)"'] \\
& & \\
A_o \arrow[uu, shift right, "\eta(A_o)"'] \arrow[ruu, "e_o"] \arrow[rr, "m_o"'] & & G(A_1) \arrow[uu, shift right, "\eta\circ G(A_1)"']
\end{tikzcd}
$$

[1] Nach (4.7) kann man die relativen Cobilder aus Cobildern in K_1 erhalten.

Wegen $G(m_1) \in \mathrm{Mono}(K_o)$ ist mit $m_o \in M_o$ auch $e_o \in M_o$. Wegen (3.3)(2) und $a_o \in \mathrm{Epi}(K_o)$ ist mit $G(e_1)$ auch $e_o \in Q_{K_o}(M_o)$, so daß $e_o \in \mathrm{Iso}(K_o)$ folgt.

(2) Es sei $\bar{m}_o$ Egalisator zu $K(u_1)$, $K(v_1)$ mit $u_1, v_1 \colon A_1 \longrightarrow C_1$ in K_1. Dann ist $u_1 m_1 = v_1 m_1$, und es existiert ein $d_o \colon G(B_1) \longrightarrow A_o$ mit $m_o d_o = G(m_1)$, also $d_o e_o = A_o$ und somit wegen $G(m_1) \in \mathrm{Mono}(K_o)$ e_o Isomorphismus. Dann ist $K(m_1)$ Egalisator zu $K(u_1)$, $K(v_1)$, also m_1 Egalisator zu u_1, v_1, wenn K Egalisatoren reflektiert oder $M_1 \subset \mathrm{Init}_G(K_1)$ ist.

(<u>10.6</u>) <u>THEOREM</u>: Bei den folgenden Aussagen für einen Funktor $G \colon K_1 \longrightarrow K_o$ und eine Teilklasse $M_o \subset \mathrm{Mono}(K_o)$ impliziert jede Aussage die folgende:

(i) Bis auf eine Äquivalenz L ist G der vergeßliche Funktor einer vollen, $Q^o_{K^t_o}(G^{t^{-1}}(M_o))$-reflexiven Unterkategorie L einer monadischen Kategorie K^t_o über K_o, d.h. G ist das Kompositum $G = G^t \cdot \mathrm{In} \cdot L$:

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, hook, "\mathrm{In}"] & K^t_o \arrow[d, "G^t"] \\ K_1 \arrow[u, "L", "\wr"'] \arrow[r, "G"'] & K_o \end{tikzcd}$$

(ii) Wie (i), jedoch ist In die Inklusion einer vollen, reflexiven und schwach $G^{t^{-1}}(M_o)$-abgeschlossenen Unterkategorie L.

(iii) Wie (i), jedoch ist In die Inklusion einer vollen, reflexiven Unterkategorie L.

(iv) G ist prämonadisch.

Alle vier Aussagen sind äquivalent, wenn K_o epimorphe M_o-Cobilder hat, aus denen G (epimorphe) $G^{-1}(M_o)$-Cobilder erzeugt, und wenn entweder

(a) K_1 Coegalisatoren zu G-absoluten Paaren hat

oder (b) K_1 Produkte hat und K_o $Q^o_{K_o}(M_o)$-coklein ist.

Beweis: (i) ⟹ (ii) folgt aus (6.4)(2) und (ii) ⟹ (iii) ist trivial.

(iii) ⟹ (iv) Die zu G gehörige Coeinheit ε stimmt bis auf Isomorphie mit $R \cdot \varepsilon^t \cdot \mathrm{In}$ überein, wobei R ein Reflektor zu In und ε^t die Coeinheit zu G^t ist. Weil R Colimites erhält, folgt der Beweis aus (10.1)(iv).

(iv) ⟹ (i) Man faktorisiert den Vergleichsfunktor über sein (existierendes) Bild und erhält $K = \mathrm{In} \cdot L$ mit einer Äquivalenz L. Nach (8.4) ist K_1 $Q^o_{K_1}(G^{-1}(M_o))$-coklein, so daß wegen (7.5) die in (a) genannten Coegalisatoren auch im Fall (b) existieren. Deren Existenz garantiert nach (6.6) (iii) die Existenz eines Linksadjungierten zu K und damit zu In. Wegen $G(Q_{K_1}(G^{-1}(M_o))) \subset Q_{K_o}(M_o)$ folgt aus (10.5)(1) und (3.2)(2), daß K und damit In schwach abgeschlossen gegen $G^{t^{-1}}(M_o)$-Morphismen ist. Mit (6.4)(1) und (8.3) ergibt sich dann die $Q^o_{K^t_o}(G^{t^{-1}}(M_o))$-Reflexivität.

Zu bemerken ist, daß auch unter den genannten Zusatzvoraussetzungen die Äquivalenz (i) ⟺ (ii) nicht besagt, daß jede volle, reflexive Unterkategorie einer monadischen Kategorie (zumindest) Epi-reflexiv ist, sie läßt sich lediglich wie in (i) darstellen!

(<u>10.7</u>) <u>THEOREM</u>: K_o sei vollständig und Mono-klein. Außerdem habe K_o reguläre Bilder[1]. Dann sind folgende Aussagen für den Funktor $G \colon K_1 \longrightarrow K_o$ äquivalent:

(i) Bis auf eine Äquivalenz L ist G der vergeßliche Funktor einer vollen, Reg-Epi-reflexiven Unterkategorie L einer monadischen Kategorie K^t_o über K_o mit $t = (T, \eta, \mu)$, $T(\mathrm{Reg\text{-}Epi}(K_o)) \subset \mathrm{Reg\text{-}Epi}(K_o)$, also $G = G^t \circ \mathrm{In} \circ L$.

(ii) Wie (i), jedoch ist In die Inklusion einer vollen, schwach Produkt- und Mono-abgeschlossenen Unterkategorie L von K^t_o.

---

[1] Das ist nach (9.1) und (7.6) sicher dann der Fall, wenn $\mathrm{Reg\text{-}Epi}(K_o) \subset \mathrm{Surj}(K_o)$ gilt und K_o Ext-Epi-coklein ist.

(iii) G erhält und reflektiert reguläre Epimorphismen und hat einen Linksadjungierten, und K_1 hat Coegalisatoren.

Ist eine der drei äquivalenten Bedingungen erfüllt, so ist K_1 vollständig, Mono-klein und Ext-Epi-coklein. K_1 hat reguläre Bilder, die von G erzeugt werden, sowie verallgemeinerte Coegalisatoren. K_1 ist ($\mathcal{D}$-) covollständig, wenn K_o es ist, und besitzt einen (Reg-Epi-projektiven) Generator, wenn K_o einen hat. Sind in K_o reguläre Epimorphismen universell oder gegen ($\mathcal{D}$-)Limites abgeschlossen, so auch in K_1.

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii) folgt aus (6.4)(2), (ii) $\Rightarrow$ (iii): K_o^t hat nach (9.6) reguläre Bilder und ist nach (9.1)(4) und (8.4) Reg-Epi-coklein, so daß nach (6.3) L Reg-Epi-reflexiv in K_o^t ist. Damit folgt (iii) aus (9.6), (9.8) und (7.5). (iii) $\Rightarrow$ (i): Wegen (10.1)(vii) und (6.7)(b) hat man die Darstellung (10.6)(iii), wobei $t = (T,\eta,\mu)$ die durch G induzierte Monade ist und deshalb $T(\text{Reg-Epi}(K_o)) \subset \text{Reg-Epi}(K_o)$ folgt. Weiter ist K_1 vollständig, Mono-klein und hat Coegalisatoren, so daß K_1 nach (9.12) reguläre Bilder hat, die von G erzeugt werden. Damit folgt alles aus (10.6). Zum Beweis der Zusatzaussagen beachte man noch (7.4), (9.2) und (9.3).

(<u>10.8</u>) <u>BEMERKUNGEN</u>:

(1) Im Falle $K_o = \mathcal{M}e$ sind die Voraussetzungen von (10.7) erfüllt, und jeder Funktor $T\colon \mathcal{M}e \longrightarrow \mathcal{M}e$ erhält reguläre Epimorphismen. (10.7) ist dann im wesentlichen Thm.3, Kap.I in [56].

(2) Unter den Voraussetzungen von (10.7) ist G genau dann <u>regulär</u> im Sinne von Herrlich [32], wenn G eine der äquivalenten Bedingungen aus (10.7) erfüllt und identitiv Isomorphismen erzeugt.

Abschließend beweisen wir noch für den Fall der Basiskategorie $\mathcal{M}e$ einen "inneren" Charakterisierungssatz:

(<u>10.9</u>) <u>KOROLLAR</u>: Für jede Kategorie K sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:

(i) K ist äquivalent zu einer vollen, Reg-Epi-reflexiven Unterkategorie einer monadischen Kategorie über $\mathcal{M}e$.

(ii) K ist covollständig und besitzt einen Generator P mit

$$C(\{P\}) = \text{Reg-Epi}(K) \qquad (\text{vgl. } (9.3)).$$

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii) Nach (10.7) ist K covollständig. Weil es einen treuen Funktor $G\colon K \longrightarrow \mathcal{M}e$ mit Linksadjungiertem F gibt, ist $F(X)$, $X \neq \emptyset$ Menge, stets ein Generator in K, und es folgt

$$C(\{F(X)\}) = G^{-1}(C(\{X\})) = G^{-1}(\text{Reg-Epi}(\mathcal{M}e)) = \text{Reg-Epi}(K) :$$

vgl. Bemerkung (3) vor (9.3) sowie (10.7)(iii).

(ii) $\Rightarrow$ (i) Man betrachtet den Hom-Funktor $G := K(P,-) : K \longrightarrow \mathcal{M}e$. Weil K Copotenzen (einschließlich Anfangsobjekt) besitzt, hat G wie jeder Hom-Funktor (sogar jeder darstellbare Funktor) von K einen Linksadjungierten F, der sich so wählen läßt, daß $F(1) = P$ ist ($1 = \{0\}$). Somit folgt $G^{-1}(\text{Reg-Epi}(\mathcal{M}e)) = G^{-1}(C(\{1\})) = C(\{P\}) = \text{Reg-Epi}(K)$, so daß (10.7)(iii) erfüllt ist.

Man bemerkt, daß man von der Covollständigkeitsvoraussetzung in (ii) nur die Existenz von Coegalisatoren und Copotenzen des Generators P benutzt.

11. Die Isomorphiesätze der Algebra und das Lemma von Zassenhaus

Wir formulieren jetzt zunächst eine Ergänzung zu §3, die nachträglich auch den Gebrauch der Bezeichnung "Urbild" in (0.2) rechtfertigt:

(<u>11.1</u>) <u>PROPOSITION</u>: $G: \mathcal{K}_1 \longrightarrow \mathcal{K}_o$ sei ein Funktor, $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{K}_1$ eine Teilklasse mit $\mathrm{Iso}(\mathcal{K}_1) \subset \mathcal{M}_1$ und $\mathcal{M}_1 \cdot \mathrm{Iso}(\mathcal{K}_1) \subset \mathcal{M}_1$, und $\mathcal{K}_o$ habe Pullbacks. Für alle $f_o: A_o \longrightarrow G(A_1)$ in $\mathcal{K}_o$ erhält man einen Funktor

$$f_o^{-1}(-) : \langle \mathcal{M}_1, A_1 \rangle \longrightarrow \langle \mathcal{K}_o, A_o \rangle \quad ,$$

der auf den Objekten durch Auswahl der Pullbacks in $\mathcal{K}_o$ gegeben wird:

$$\begin{tikzcd} P_o \arrow[r, "f'_o"] \arrow[d, "f_o^{-1}(m_1)"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{Pb.}"] & G(B_1) \arrow[d, "G(m_1)"] \\ A_o \arrow[r, "f_o"'] & G(A_1) \end{tikzcd} \qquad (m_1 \in \mathcal{M}_1)$$

G hat dann und nur dann lokale $\mathcal{M}_1$-Cobilder, wenn $f_o^{-1}(-)$ einen Linksadjungierten besitzt.

Beweis: Hat G lokale $\mathcal{M}_1$-Cobilder und ist $y_o: B_o \longrightarrow A_o$ in $\mathrm{Ob}\langle \mathcal{K}_o, A_o \rangle$, so definiert man den Linksadjungierten $f_o(-)$ von $f_o^{-1}(-)$ auf y_o so, daß $G(f_o(y_o))e_o = f_o y_o$ ein lokales $\mathcal{M}_1$-Cobild ist. Die Adjunktionseinheit $\eta(y_o)$ wird durch $f_o^{-1}(f_o(y_o))\eta(y_o) = y_o$ und $f'_o\eta(y_o) = e_o$ bestimmt. Ist umgekehrt $f_o(-)$ linksadjungiert zu $f_o^{-1}(-)$, so definiert man durch $m_1 := f_o(A_o)$ und $e_o := f'_o\eta(A_o)$ ein lokales $\mathcal{M}_1$-Cobild zu f_o: $f_o = G(m_1)\, e_o$.

Natürlich kann man jetzt versuchen, lokale $\mathcal{M}_1$-Cobilder mit Hilfe des Adjoint Functor Theorem zu konstruieren, erhält dadurch jedoch nur einen "neuen" Beweis für (5.1). In Verbindung mit (4.4) folgt speziell:

(<u>11.2</u>) <u>KOROLLAR</u>: $\mathcal{K}$ habe für die Unterkategorie $\mathcal{M}$ von $\mathcal{K}$, die alle Isomorphismen enthalte, $\mathcal{M}$-Urbilder. Dann existiert für alle $f: A \longrightarrow B$ in $\mathcal{K}$ genau dann ein Linksadjungierter zu $f^{-1}(-): \langle \mathcal{M}, B \rangle \longrightarrow \langle \mathcal{M}, A \rangle$, wenn $\mathcal{K}$ $\mathcal{M}$-Cobilder hat.

(<u>11.3</u>) Ein Analogon soll jetzt für Kernpaare hergeleitet werden. Wie in [60] definiert man, daß die Kategorie $\mathcal{K}$ <u>Urbilder von Kernpaaren</u> hat, wenn für alle $f: A \longrightarrow B$ und jedes Kernpaar (k_o, k_1) mit Cobereich B ein Kernpaar $f^{-1}(k_o, k_1) = (k'_o, k'_1)$ und ein $f' \in \mathcal{K}$ mit $f k'_i = k_i f'$, i=0,1, existiert, so daß folgende universelle Eigenschaft gilt:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[dr, dashed, "t"] \arrow[drr, "g"] \arrow[ddr, shift right, "r_o"'] \arrow[ddr, shift left, "r_1"] & & \\ & K' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, shift right, "k'_o"'] \arrow[d, shift left, "k'_1"] & K \arrow[d, shift right, "k_o"'] \arrow[d, shift left, "k_1"] \\ & A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

Für alle g, r_i mit $f\, r_i = k_i\, g$, i=0,1, gibt es genau ein t mit $f't = g$ und $k'_i\, t = r_i$, i=0,1.

Offenbar hat $\mathcal{K}$ Urbider von Kernpaaren, wenn $\mathcal{K}$ Kernpaare hat. In diesem Fall hat man für alle $f: A \longrightarrow B$ einen Urbildfunktor

$$f^{-1}(-): \langle Kp(\mathcal{K}), B \rangle \longrightarrow \langle Kp(\mathcal{K}), A \rangle \quad ,$$

wobei für $X \in \mathrm{Ob}\mathcal{K}$ mit $\langle Kp(\mathcal{K}), X \rangle$ die offensichtliche (Komma-)Kategorie der Kernpaare mit Cobereich X bezeichnet wird.

$f^{-1}(-)$ besitzt offensichtlich dann einen Linksadjungierten $f(-)$, wenn $\mathcal{K}$ außerdem Coegalisatoren hat. In Analogie zu (11.2) nennt man für $(k_o, k_1) \in \mathrm{Ob}\langle Kp(\mathcal{K}), A \rangle$ $f(k_o, k_1)$ das <u>Bild</u> <u>von</u> (k_o, k_1) <u>unter</u> f.

Zwecks Abkürzung der Darstellung treffen wir für den Rest des Paragraphens folgende

Generalvoraussetzung: $\mathcal{K}$ habe Pullbacks und Coegalisatoren, und reguläre Epimorphismen seien universell in $\mathcal{K}$.

Damit existieren in $\mathcal{K}$ reguläre Bilder (vgl.(9.1)) sowie Bilder und Urbilder von Kernpaaren. Wir verwenden für den Rest des Paragraphens die folgenden suggestiven Bezeichnungsweisen:

(1) Ist $(k_o,k_1) \in Ob\langle Kp(\mathcal{K}),A\rangle$, so bezeichnen wir "den" Coegalisator zu k_o, k_1 auch mit $\pi_{(k_o,k_1)}$ und seinen Cobereich mit $A/_{(k_o,k_1)}$.

(2) Für $f\colon A \longrightarrow B$ hat man die adjungierten Funktoren

$$\langle Mono(\mathcal{K}),A\rangle \underset{f^{-1}(-)}{\overset{f(-)}{\rightleftarrows}} \langle Mono(\mathcal{K}),B\rangle .$$

Ist $f = m \in Mono(\mathcal{K})$ und $n \in Ob\langle Mono(\mathcal{K}),B\rangle$, so sei $m \wedge n := m\, m^{-1}(n)$.

(3) Für $f\colon A \longrightarrow B$ hat man ferner adjungierte Funktoren

$$\langle Kp(\mathcal{K}),A\rangle \underset{f^{-1}(-)}{\overset{f(-)}{\rightleftarrows}} \langle Kp(\mathcal{K}),B\rangle .$$

(Wegen der Verschiedenartigkeit der Argumente sind Verwechslungen mit (2) nicht zu befürchten.) Für $f = m \in Mono(\mathcal{K})$ und $(k_o,k_1) \in Ob\langle Kp(\mathcal{K}),B\rangle$ sei $m \wedge (k_o,k_1) := m^{-1}(k_o,k_1)$.

(4) Für $(k_o,k_1) \in Ob\langle Kp(\mathcal{K}),A\rangle$ und $m \in Ob\langle Mono(\mathcal{K}),A\rangle$ sei $(k_o,k_1)\, m := \pi^{-1}_{(k_o,k_1)}(\pi_{(k_o,k_1)}(m))$.

Aus der Existenz regulärer Bilder ergibt sich trivial das

(11.4) KOROLLAR (1. Isomorphiesatz): Für jeden Morphismus $f\colon A \longrightarrow B$ ist

$$Ber(f(A)) \cong A/_{(k_o,k_1)} ,$$

wobei (k_o,k_1) Kernpaar von f ist.

(11.5) THEOREM (2. Isomorphiesatz) : Für $u \in Ob\langle Mono(\mathcal{K}),A\rangle$ und $(k_o,k_1) \in Ob\langle Kp(\mathcal{K}),A\rangle$ gilt

$$Ber(u)/_{u \wedge (k_o,k_1)} \cong Ber((k_o,k_1)\, u)/_{((k_o,k_1)\, u) \wedge (k_o,k_1)} .$$

Beweis:

$$\begin{tikzcd}
K' \arrow[rr, "u'"] \arrow[dr, dashed, "t'"] \arrow[dd, shift right, "k'_o"'] \arrow[dd, shift left, "k'_1"] & & K \arrow[dd, shift right, "k_o"'] \arrow[dd, shift left, "k_1"] \\
& K'' \arrow[ur, "m''"] \arrow[dd, shift right, "k''_o"'] \arrow[dd, shift left, "k''_1"] & \\
U \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, dashed, "t"] \arrow[dd, "q"'] & & A \arrow[dd, "c = \pi_{(k_o,k_1)}"] \\
& P \arrow[ur, "m' = c^{-1}(m)"'] \arrow[dl, "c'"] & \\
D \arrow[rr, "m = c(u)"'] & & C
\end{tikzcd}$$

Es sei $(k'_o,k'_1) = u \wedge (k_o,k_1)$ und $(k''_o,k''_1) = m' \wedge (k_o,k_1)$. Als Kernpaar von $c\, u = m\, q$ ist (k'_o,k'_1) wegen $m \in Mono(\mathcal{K})$ auch Kernpaar zum regulären Epimorphismus q, so daß q Coegalisator von (k'_o,k'_1) und somit $D \cong U/_{(k'_o,k'_1)}$ ist. Ebenso ist (k''_o,k''_1) als Kernpaar von $c\, m' = m\, c'$ auch Kernpaar von c'; weil mit c auch c' regulärer Epimorphismus ist, ist c' Coegalisator zu (k''_o,k''_1) und somit $D \cong P/_{(k''_o,k''_1)}$.

(11.6) THEOREM (3. Isomorphiesatz) : Für (k_o,k_1), $(n_o,n_1) \in Ob\langle Kp(\mathcal{K}),A\rangle$ mit $(k_o,k_1) \leq (n_o,n_1)$ (in der Ordnungskategorie $\langle Kp(\mathcal{K}),A\rangle$) gilt

$$A/_{(n_o,n_1)} \cong \left(A/_{(k_o,k_1)}\right)/_{\pi_{(k_o,k_1)}(n_o,n_1)} .$$

Beweis:

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r, "q"] \arrow[dr, shift left, "n_o"] \arrow[dr, shift right, "n_1"'] & N' \arrow[dr, shift left, "n'_o"] \arrow[dr, shift right, "n'_1"'] & \\
K \arrow[u, "j"] \arrow[r, shift left, "k_o"] \arrow[r, shift right, "k_1"'] & A \arrow[r, "\pi(k_o{,}k_1)"] \arrow[dr, "\pi(n_o{,}n_1)"'] & A/(k_o,k_1) \arrow[d, "p"] \\
 & & A/(n_o,n_1)
\end{tikzcd}$$

Der (einzige) Morphismus $j\colon (k_o,k_1) \longrightarrow (n_o,n_1)$ in $\langle Kp(K),A\rangle$ impliziert die Existenz eines p mit $p\,\pi_{(k_o,k_1)} = \pi_{(n_o,n_1)}$. Offenbar ist p ein Coegalisator zu $\pi_{(k_o,k_1)}\, n_o,\ \pi_{(k_o,k_1)}\, n_1$, so daß $(n'_o,n'_1) := \pi_{(k_o,k_1)}(n_o,n_1)$ Kernpaar von p ist. Damit ist p aber auch Coegalisator zu (n'_o,n'_1), also $Cob(p) \cong Ber(p)/_{(n'_o,n'_1)}$, weil wegen $Reg\text{-}Epi(K) \subset Surj(K)$ q epimorph ist.

Aus [60] übernehmen wir noch einen weiteren Satz, der im Spezialfall K = $\mathcal{G}rp$ die Bijektion zwischen den Normalteilern über dem Kern eines surjektiven Gruppenhomomorphismus und den Normalteilern im Bild zur Folge hat:

(11.7) PROPOSITION: Ist (k_o,k_1) Kernpaar des regulären Epimorphismus $e\colon A \longrightarrow B$, so existieren zueinander adjungierte Äquivalenzen

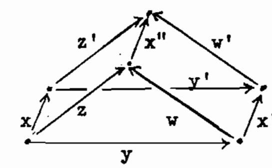
$$\langle (k_o,k_1),\langle Kp(K),A\rangle\rangle \underset{e^{-1}(-)}{\overset{e(-)}{\rightleftarrows}} \langle Kp(K),B\rangle \quad .$$

Ein wenig komplizierter ist es, die Aussage des Lemmas von Zassenhaus etwa aus der Gruppentheorie in allgemeine Kategorien zu übertragen. Hier fällt nämlich wesentlich stärker als bei den vorangegangenen Isomorphiesätzen ins Gewicht, daß man im abstrakten Fall Normalteiler und Untergruppen auf ganz verschiedene Art und Weise darstellt, nämlich als Kern-

paare und Monomorphismen, so daß beispielsweise schon eine bloße Hintereinanderschaltung nicht möglich ist. Das ändert sich ganz wesentlich, wenn man wie Wyler [84] zusätzlich die Existenz von Nullmorphismen fordert, weil man dann mit Kernen und Monomorphismen rechnen kann. Aber bekanntlich sind schon recht "einfache" algebraische Kategorien wie etwa Halbgruppen oder Ringe mit Eins nicht punktiert.
Wesentlich für das folgende ist das wohlbekannte

(11.8) LEMMA: Im kommutativen Diagramm (11.8.1) seien die Grundfläche und die linke Seitenfläche Pushouts. Dann ist auch die rechte Seitenfläche ein Pushout.

(11.8.1)



Aus der Generalvoraussetzung ergibt sich insbesondere die Existenz von Pushouts zu regulären Epimorphismen. Daraus wiederum erhält man die Existenz endlicher Vereinigungen von Kernpaaren, also von endlichen Suprema in der Kommakategorie $\langle Kp(K),X\rangle$, $X \in Ob K$ (vgl. [60]). Sind (k_o,k_1), $(n_o,n_1) \in Ob\langle Kp(K),X\rangle$, so bezeichnen wir ihre Vereinigung mit

$$(k_o,k_1)(n_o,n_1).$$

Weil wir im folgenden auch Pushouts zu regulären Epimorphismen und Monomorphismen benötigen, setzen wir zusätzlich die Existenz von Pushouts voraus.

(11.9) THEOREM (Lemma von Zassenhaus): Es seien $u\colon U \longrightarrow A$, $v\colon V \longrightarrow A$ Monomorphismen und $K \underset{k_1}{\overset{k_o}{\rightrightarrows}} U$, $N \underset{n_1}{\overset{n_o}{\rightrightarrows}} V$ Kernpaare. Man bildet dann ein Pullback (u',v') zu (v,u) und setzt $i := \pi^{-1}_{(k_o,k_1)} \circ \pi_{(k_o,k_1)}(v')$, $j := \pi^{-1}_{(n_o,n_1)} \circ \pi_{(n_o,n_1)}(u')$, $x := \eta_U(v')$, $y := \eta_V(u')$ mit den Adjunktionseinheiten $\eta_U\colon Id \longrightarrow \pi^{-1}_{(k_o,k_1)} \circ \pi_{(k_o,k_1)}$, $\eta_V\colon Id \longrightarrow \pi^{-1}_{(n_o,n_1)} \circ \pi_{(n_o,n_1)}$.

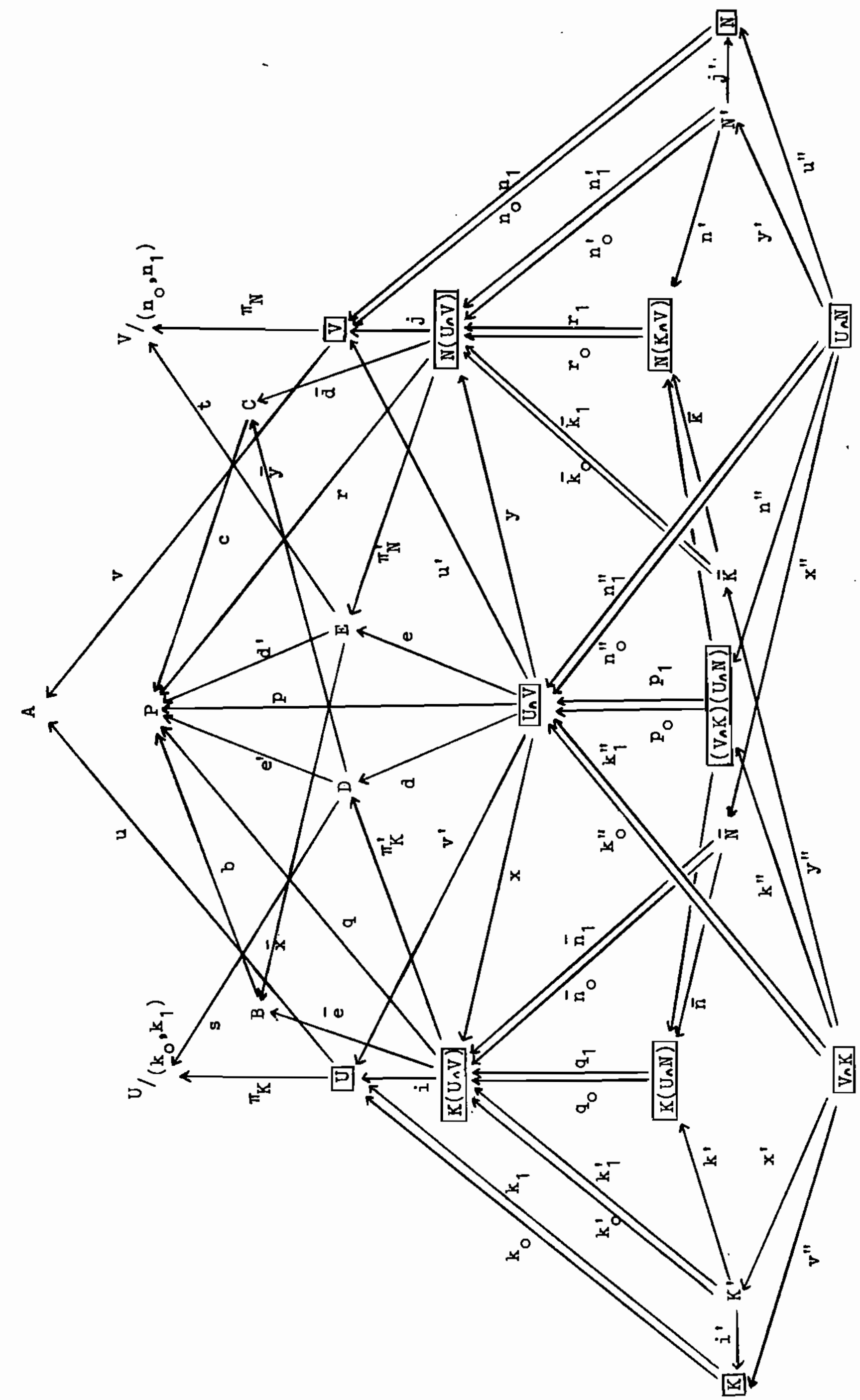
$$\begin{tikzcd}
U/(k_o,k_1) & & A & & V/(n_o,n_1) \\
U \arrow[u, "\pi_K:=\pi(k_o,k_1)"] \arrow[urr, "u"] & D \arrow[ul, "s"'] & & E \arrow[ur, "t"] & V \arrow[u, "\pi_N:=\pi(n_o,n_1)"'] \arrow[ull, "v"'] \\
\mathrm{Ber}(i)=:K(U\wedge V) \arrow[u, "i"] \arrow[ur, "\pi'_K"] & & U\wedge V \arrow[ll, dashed, "x"] \arrow[rr, dashed, "y"'] \arrow[uu, "u\wedge v"] \arrow[ull, "v'"] \arrow[ul, "d"'] \arrow[ur, "e"] \arrow[urr, "u'"'] & & N(U\wedge V) := \mathrm{Ber}(j) \arrow[u, "j"'] \arrow[ul, "\pi'_N"]
\end{tikzcd}$$

Dann gilt:

$$\mathrm{Ber}(i)\Big/(i\wedge(k_o,k_1))(x(u'\wedge(n_o,n_1))) \cong \mathrm{Ber}(u\wedge v)\Big/(v'\wedge(k_o,k_1))(u'\wedge(n_o,n_1))$$

$$\cong \mathrm{Ber}(j)\Big/(j\wedge(n_o,n_1))(y(v'\wedge(k_o,k_1))) \;.$$

Beweis (vgl. folgende Seite): Es sei (e',d') Pushout zu (d,e), $(\bar{e},\bar{x})$ Pushout zu (x,e) und $(\bar{d},\bar{y})$ Pushout zu (y,d); dabei entstammen die regulären Epimorphismen d, e den Bildzerlegungen $s\,d = \pi_K\,v'$ und $t\,e = \pi_N\,u'$. Mit den durch $b\,\bar{e} = e'\,\pi'_K$, $b\,\bar{x} = d'$ und $c\,\bar{d} = d'\,\pi'_N$, $c\,\bar{y} = e'$ bestimmten regulären Epimorphismen b und c folgt nach (11.8), daß (b,e') Pushout zu $(\bar{e},\pi'_K)$ und (c,d') Pushout zu $(\bar{d},\pi'_N)$ ist. $(k'_o,k'_1) := i\wedge(k_o,k_1)$ ist als Kernpaar von $\pi_K\,i = s\,\pi'_K$ auch Kernpaar von π'_K, so daß π'_K Coegalisator zu k'_o, k'_1 ist; ebenso ist π'_N Coegalisator zu $(n'_o,n'_1) := j\wedge(n_o,n_1)$. Analog zeigt man, daß d bzw. e Coegalisator zu $(k''_o,k''_1) := v'\wedge(k_o,k_1)$ bzw. $(n''_o,n''_1) := u'\wedge(n_o,n_1)$ ist. Schließlich ist aufgrund der Konstruktion von Bildern von Kernpaaren $\bar{e}$ bzw. $\bar{d}$ Coegalisator zu $(\bar{n}_o,\bar{n}_1) := x(n''_o,n''_1)$ bzw. $(\bar{k}_o,\bar{k}_1) := y(k''_o,k''_1)$. Weil nun $q := b\,\bar{e}$, $p := e'\,d$, $r := c\,\bar{d}$ Coegalisator von $(q_o,q_1) := (k'_o,k'_1)(\bar{n}_o,\bar{n}_1)$, $(p_o,p_1) := (k''_o,k''_1)(n''_o,n''_1)$, $(r_o,r_1) := (n'_o,n'_1)(\bar{k}_o,\bar{k}_1)$ resp. ist, ergibt sich die Behauptung.



(11.10) BEMERKUNG:

(1) Die in diesem Paragraphen benutzten Voraussetzungen sind in jeder vollen, Reg-Epi-reflexiven Unterkategorie einer monadischen Kategorie über der Kategorie der Mengen erfüllt: vgl. (10.7), (10,8). Damit sind insbesondere die von Wyler [84] genannten Beispielkategorien erfaßt, nämlich alle Varietäten, deren Algebren eine Gruppenstruktur zugrundeliegt, derart daß die einelementige Untergruppe auch eine Unteralgebra ist; hier sind dagegen alle Varietäten zugelassen. Gleichzeitig werden die entsprechenden Sätze für Kategorien von Ω-Algebren (vgl. z.B. Cohn [9] II,6) erfaßt.

(2) In einer späteren Arbeit sollen die hier begonnenen Untersuchungen fortgeführt werden.

V. KATEGORIEN UNIVERSELLER ALGEBREN

12. Typen Birkhoff'scher Algebren und algebraische Theorien

Unter einem Typ versteht man in der universellen Algebra (vgl.z.B. [9]) eine Menge Ω sogenannter formaler Operationen zusammen mit einer Abbildung s von Ω in die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen 0,1,2,..., die jedem $\omega \in \Omega$ seine "Stellenzahl" $s(\omega)$ zuordnet. Die Fasern dieser Abbildung liefern eine Folge von Mengen $\Omega(n)$, und umgekehrt gibt jede Mengenfolge Anlaß zu einem Typ. Aus kategorieller Sicht versteht man daher unter einem Typ ein Objekt in $\mathcal{M}e^{\mathbb{N}}$, der "$\mathbb{N}$-fachen" Potenz der Kategorie der Mengen. Statt $\mathbb{N}$ kann man allgemeiner irgendeine Teilklasse $\mathbb{S}$ der Klasse $\mathbb{K}$ aller Kardinalzahlen mit $1 \in \mathbb{S}$ nehmen. Die zur vollen, von $\mathbb{S}$ in $\mathcal{M}e$ erzeugten Unterkategorie duale Kategorie werde mit S bezeichnet. Jedes $n \neq 0$ in $\mathbb{S} = \mathrm{Ob}S$ ist dann eine n-fache Potenz von 1 mit Projektionen $\pi_{i,n}: n \longrightarrow 1$, $i \in n$; im Falle $0 \in \mathbb{S}$ ist 0 ein Endobjekt in S.

Eine algebraische Theorie (zu $\mathbb{S}$) ist ein Produkt-stetiger Clone $A: S \longrightarrow A$. Für $n \neq 0$ in $\mathbb{S}$ ist also $A^n := A(n)$ mit den Projektionen $\pi^A_{i,n} := A(\pi_{i,n})$ eine n-fache Potenz von A^1 (statt $\pi^A_{i,n}$ schreiben wir oft einfach $\pi_{i,n}$); im Falle $0 \in \mathbb{S}$ ist A^0 ein Endobjekt in A. Mit $\mathcal{A}\ell g\mathcal{T}h_{\mathbb{S}}$ wird die volle Unterkategorie aller algebraischen Theorien in der Kommakategorie $\langle S, \mathcal{C}\ell one\rangle$ bezeichnet. Im Falle $\mathbb{S} = \mathbb{K}$ schreibt man einfach $\mathcal{A}\ell g\mathcal{T}h$. [1]

Man definiert einen "vergeßlichen" Funktor

$$U := U_{\mathbb{S}} : \mathcal{A}\ell g\mathcal{T}h_{\mathbb{S}} \longrightarrow \mathcal{M}e^{\mathbb{S}}$$

durch $U(A)(n) := A(A^n, A^1)$ für $A: S \longrightarrow A$

und $U(J)(n) := J_{n,1}$ für $J: A \longrightarrow B$ in $\mathcal{A}\ell g\mathcal{T}h_{\mathbb{S}}$, wobei $J_{n,1}$ die

[1] Ist $\mathbb{S}$ nicht klein, so hat man geeignete mengentheoretische Vorkehrungen zu treffen.

evidente Einschränkung des J zugrundeliegenden und wieder mit J bezeichneten Funktors $J: A \longrightarrow B := \mathrm{Cob}(B)$ bezeichnet.

(12.1) THEOREM: Für kleines $\mathbb{S}$ ist der Funktor $U_{\mathbb{S}}$ schwach monadisch.

Beweis: Zunächst wird völlig analog zu [53],3.1 ein Linksadjungierter zu U konstruiert. Der einzige Unterschied besteht darin, daß man die in [53] vorgenommene induktive Konstruktion ordinal fortsetzen muß, weil $\mathbb{S}$ nicht-endliche Kardinalzahlen enthalten kann.

Es sei also $\Omega: \mathbb{S} \longrightarrow \mathcal{M}e$. Dann konstruiert man die "freie von Ω erzeugte algebraische Theorie" (zu $\mathbb{S}$), indem man zunächst für jede Ordinalzahl α eine Menge $M_\alpha(n,k)$, $n,k \in \mathbb{S}$, angibt:

Anfangsschritt:

$M_0(n,k) := (\Omega(n) \cup \{\pi_{i,n}: i \in n\})^k$ (Die Vereinigung ist disjunkt zu nehmen; für $k = 0$ ist $M_0(n,k)$ einelementig.)

Nachfolgerschritt:

$$M_{\alpha+1}(n,k) := M_\alpha(n,k) \cup M_\alpha(n,1)^k \cup \{(\tau,\sigma): \text{Es gibt ein } m \in \mathbb{S} \text{ mit } \sigma \in M_\alpha(n,m) \text{ und } \tau \in M_\alpha(m,k)\}$$

Limesschritt:

$$M_\alpha(n,k) := \bigcup_{\beta < \alpha} M_\beta(n,k)$$

Man setzt dann $M(n,k) := \bigcup_{\alpha \text{ Ordinalz.}} M_\alpha(n,k)$ und $M := \bigcup_{n,k \in \mathbb{S}} M(n,k)$ mit disjunkten Vereinigungen.

Die Elemente in $M_\alpha(n,1)^k$ für $k \neq 0$ sind Abbildungen $f: k \longrightarrow M_\alpha(n,1)$, die im folgenden immer durch ihre Werte in der Form $f = \langle f(i): i \in k\rangle$ angegeben werden. Im Falle $k = 1$ identifiziert man $\langle f(0)\rangle = f(0)$.

Auf M wird nun die kleinste Äquivalenzrelation $\sim$ mit den folgenden Eigenschaften betrachtet:

(1) Für $\sigma \in M(n,k)$ und $\gamma_o \in M(0,0)$ gilt

$$(\gamma_o,\sigma) \sim \sigma \quad \text{für} \quad k = 0 \quad \text{und} \quad (<\pi_{i,k}: i \in k>,\sigma) \sim \sigma \quad \text{für } k \neq 0$$

sowie $(\sigma,\gamma_o) \sim \sigma$ für $n = 0$ und $(\sigma,<\pi_{j,n}: j \in n>) \sim \sigma$ für $n \neq 0$.

(2) Für $\sigma \in M(n,m)$, $\tau \in M(m,k)$ und $\rho \in M(k,t)$ gilt $((\rho,\tau),\sigma) \sim (\rho,(\tau,\sigma))$.

(3) Für σ, $\sigma' \in M(n,m)$ und τ, $\tau' \in M(m,k)$ mit $\sigma \sim \sigma'$ und $\tau \sim \tau'$ gilt $(\tau,\sigma) \sim (\tau',\sigma')$.

(4) Für σ, $\tau \in M(n,k)$ und $k = 0$ ist $\sigma \sim \tau$.

(5) Für $\sigma_i \in M(n,1)$, $i \in k$, $k \neq 0$, gilt $(\pi_{i,k},<\sigma_i: i \in k>) \sim \sigma_i$ für alle $i \in k$.

(6) Für $\sigma \in M(n,k)$, $k \neq 0$, gilt $<(\pi_{i,k},\sigma): i \in k> \sim \sigma$.

(7) Für σ_i, $\tau_i \in M(n,1)$ mit $\sigma_i \sim \tau_i$, $i \in k$, $k \neq 0$, gilt $<\sigma_i: i \in k> \sim <\tau_i: i \in k>$.

Dabei sind n, k, m, $t \in \mathbb{S}$.

Die Eigenschaften (1) - (3) erlauben es, auf einer Klasse von Repräsentanten der $\sim$-Äquivalenzklassen eine Kategorienstruktur zu erklären. Als Objekte der so erhaltenen Kategorie F_Ω können die Elemente in $\mathbb{S}$ angesehen werden. Wegen (4) ist 0 (im Falle $0 \in \mathbb{S}$) Endobjekt in F_Ω, und (5) - (7) garantieren, daß $k \neq 0$ auch in F_Ω eine k-fache Potenz von 1 ist. Der offensichtliche Funktor $F_\Omega: S \longrightarrow F_\Omega$ ist also eine algebraische Theorie. Bezeichnet man für $n \in \mathbb{S}$ mit $\eta(\Omega)(n): \Omega(n) \longrightarrow F_\Omega(n,1)$ die entsprechende Einschränkung der kanonischen Projektion, so weist man leicht nach, daß hiermit die Einheit einer Adjunktion definiert ist. Weil $\eta(\Omega)(n)$ injektiv ist, können die "Operationen" in $\Omega(n)$ als Morphismen in $F_\Omega(n,1)$ aufgefaßt werden. Außerdem ist deshalb der Linksadjungierte zu U treu.

Es bleibt zu zeigen, daß $\mathcal{A}\ell g\mathcal{T}h_{\mathbb{S}}$ Coegalisatoren U-absoluter Paare besitzt, die von U erhalten und reflektiert werden. Es seien also J, $J' : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ in $\mathcal{A}\ell g\mathcal{T}h_{\mathbb{S}}$ und $\kappa: U(\mathcal{B}) \longrightarrow \Omega$ ein absoluter Coegalisator zu $U(J)$, $U(J')$. Für n, $k \in \mathbb{S}$ sei dann

$$\mathcal{C}(C^n,C^k) := \begin{cases} \{\gamma(n)\} & \text{für } k = 0 \\ \Omega(n)^k & \text{für } k \neq 0 \end{cases}$$

Dabei ist $\gamma: \mathbb{S} \longrightarrow \mathcal{M}e$ irgendeine injektive Abbildung, deren Werte nicht in den $\Omega(n)^k$ vorkommen, und

$$C^n := \begin{cases} \gamma(0) & \text{für } n = 0 \\ \kappa(n)^n(<\pi^B_{i,n}: i \in n>) & \text{für } n \neq 0 . \end{cases}$$

$K_{n,k}: \mathcal{B}(B^n,B^k) \longrightarrow \mathcal{C}(C^n,C^k)$ werde durch

$$K_{n,k}(\omega) := \begin{cases} \gamma(n) & \text{für } k = 0 \\ \kappa(n)^k(<\pi^B_{i,k}\ \omega: i \in k>) & \text{für } k \neq 0 \end{cases}$$

definiert. Für n, k, $m \in \mathbb{S}$ betrachtet man dann das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}(A^m,A^k)\times\mathcal{A}(A^n,A^m) \arrow[r, shift left, "J_{m,k}\times J_{n,m}"] \arrow[r, shift right, "J'_{m,k}\times J'_{n,m}"'] \arrow[d, "\mu^A_{n,m,k}"'] & \mathcal{B}(B^m,B^k)\times\mathcal{B}(B^n,B^m) \arrow[r, "K_{m,k}\times K_{n,m}"] \arrow[d, "\mu^B_{n,m,k}"] & \mathcal{C}(C^m,C^k)\times\mathcal{C}(C^n,C^m) \arrow[d, dashed, "\mu^C_{n,m,k}"] \\
\mathcal{A}(A^n,A^k) \arrow[r, shift left, "J_{n,k}"] \arrow[r, shift right, "J'_{n,k}"'] & \mathcal{B}(B^n,B^k) \arrow[r, "K_{n,k}"] & \mathcal{C}(C^n,C^m)
\end{tikzcd}$$

Die obere Zeile ist ein Coegalisator, weil der absolute Coegalisator κ vom Funktor

$$\mathcal{M}e^{\mathbb{S}} \xrightarrow{\ \Delta\ } \mathcal{M}e^{\mathbb{S}}\times\mathcal{M}e^{\mathbb{S}} \xrightarrow{E_m\times E_n} \mathcal{M}e\times\mathcal{M}e \xrightarrow{\Pi_k\times\Pi_m} \mathcal{M}e\times\mathcal{M}e \xrightarrow{\ \Pi\ } \mathcal{M}e$$

erhalten wird; dabei ist Δ der Diagonalfunktor, E_m und E_n sind Auswertungsfunktoren, Π_k und Π_m Potenzfunktoren und Π der zweistellige direkte Produktfunktor der Mengen. Bezeichnet nun $\mu^A_{n,m,k}$ bzw. $\mu^B_{n,m,k}$ die Einschränkung der Kategorienmultiplikation in $\mathcal{A}$ bzw. $\mathcal{B}$, so existiert genau eine Abbildung $\mu^C_{n,m,k}$, die das rechte Rechteck im Diagramm oben kommutativ macht. Auf diese Weise erhält man eine Kategorie $\mathcal{C}$, eine algebraische Theorie $C: S \longrightarrow \mathcal{C}$ und einen Morphismus von Theorien $K: \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$, der sich als Coegalisator zu J, J' erweist. Aus dieser Konstruktion ergibt sich außerdem das gewünschte Verhalten von U.

(12.2) KOROLLAR: Für kleines $\mathbb{S}$ ist $\mathcal{AlgTh}_{\mathbb{S}}$ vollständig und covollständig und hat reguläre Bilder, die von $U_{\mathbb{S}}$ erzeugt werden.

Der Beweis folgt aus (12.1) und (9.9).

Für großes $\mathbb{S}$ kann man sich die Existenz von Limites und regulären Bildern leicht ad hoc überlegen. Auch die Existenz von Coegalisatoren beweist man für großes $\mathbb{S}$ leicht unmittelbar:

Sind $J, J' : A \longrightarrow B$ zwei Morphismen von algebraischen Theorien (zu $\mathbb{S}$), so bildet man zunächst den Coegalisator $P: \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$ zu $J, J' : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ in $\mathcal{Cat}$. Weil J und J' auf den Objekten übereinstimmen, braucht man zu dessen Konstruktion nicht wie in (A.7) vorgehen, sondern betrachtet auf $\mathcal{B}$ einfach die kleinste, $\{(J(\omega),J'(\omega)) : \omega \in \mathcal{A}\}$ umfassende normale Äquivalenzrelation auf $\mathcal{B}$. Um schließlich die Existenz der benötigten Potenzen in $\mathcal{C}$ zu gewährleisten, betrachtet man noch die kleinste normale Äquivalenzrelation $\sim$ auf $\mathcal{C}$ mit der Eigenschaft: Für alle $\omega, \omega' \in \mathcal{B}(B^n, B^k)$ ist $P(\omega) \sim P(\omega')$, falls für alle $i \in k \neq 0$ $P(\pi^B_{i,k}\ \omega) \sim P(\pi^B_{i,k}\ \omega')$ gilt.

Nach (12.2) besitzt $\mathcal{AlgTh}_{\mathbb{S}}$ insbesondere Anfangs- und Endobjekt. Ein Anfangsobjekt wird durch den identischen Funktor auf $\mathcal{S}$ gegeben. Ein Endobjekt $E: \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{E}$ ist dadurch charakterisiert, daß es für alle $n, k \in \mathbb{S}$ nur genau einen Morphismus in $\mathcal{E}(E^n, E^k)$ gibt. Gleichbedeutend damit ist, daß $E^1 \cong E^o$ in $\mathcal{E}$ ist, sofern $0 \in \mathbb{S}$ ist.

Im folgenden sei F mit $F(\Omega) := F_\Omega$ der in (12.1) konstruierte Linksadjungierte zu U: $\mathcal{AlgTh}_{\mathbb{S}} \longrightarrow \mathcal{Me}^{\mathbb{S}}$ mit der Einheit η und der Coeinheit ε. Ist A eine algebraische Theorie, so wird der zugrundeliegende Funktor von

$\varepsilon(A) : F{\circ}U(A) \longrightarrow A$ mit $J'_A : F_{U(A)} \longrightarrow \mathcal{A}$ und die durch J_A auf $F_{U(A)}$ induzierte normale Äquivalenzrelation mit $\sim_A$ bezeichnet.

Unter einem Typ einer gleichungsdefinierten algebraischen Theorie oder kurz Gleichungstyp (zu $\mathbb{S}$) versteht man ein Paar $(\Omega,\Gamma) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{Me}^{\mathbb{S}} \times \mathcal{Me}^{\mathbb{S}})$ mit $\Gamma(n) \subset F_\Omega(n,1)^2$ für alle $n \in \mathbb{S}$. Für i=0,1 hat man die Einschränkungen der kanonischen Projektionen $\pi_i(n) : \Gamma(n) \longrightarrow F_\Omega(n,1)$, also $\pi_i : \Gamma \longrightarrow U(F_\Omega)$ in $\mathcal{Me}^{\mathbb{S}}$. Für zwei Gleichungstypen (Ω,Γ) und (Ω',Γ') heißt $(\alpha,\beta) : (\Omega,\Gamma) \longrightarrow (\Omega',\Gamma')$ in $\mathcal{Me}^{\mathbb{S}} \times \mathcal{Me}^{\mathbb{S}}$ Morphismus von Gleichungstypen, falls für i=0,1

$$\pi'_i\ \beta = (U{\circ}F)(\alpha)\ \pi_i$$

gilt. Offenbar existiert zu jedem α höchstens ein passendes β; ist dies der Fall, so heißt α gleichungshomomorph. Man erhält somit die Kategorie $\mathcal{GlTyp}_{\mathbb{S}}$ der Gleichungstypen zu $\mathbb{S}$.

Man definiert einen Funktor $\Psi_{\mathbb{S}} = \Psi : \mathcal{AlgTh}_{\mathbb{S}} \longrightarrow \mathcal{GlTyp}_{\mathbb{S}}$ für jede algebraische Theorie A durch $\Psi(A) := (\Omega_A, \Gamma_A)$ mit $\Omega_A := U(A)$,

$$\Gamma_A(n) := \{(\omega_o,\omega_1) : \omega_o,\ \omega_1 \in F_{U(A)}(n,1),\ \omega_o \sim_A \omega_1\},\ n \in \mathbb{S}, \text{ und}$$

für jeden Morphismus von Theorien $J: A \longrightarrow B$ durch $\Psi(J) := (\alpha_J, \beta_J)$ mit $\alpha_J = U(J)$ und dem zugehörigen β_J; β_J existiert, weil α_J gleichungshomomorph ist, wie man leicht nachrechnet.

(12.3) THEOREM: Für kleines $\mathbb{S}$ ist $\Psi_{\mathbb{S}}$ treu und voll und besitzt einen Linksadjungierten $\Phi_{\mathbb{S}}$.

Beweis: Ist (Ω,Γ) ein Gleichungstyp, so seien zwei Morphismen von Theorien $P_o, P_1 : F_\Gamma \longrightarrow F_\Omega$ durch $U(P_i)\ \eta(\Gamma) = \pi_i$, i=0,1, bestimmt. Zu P_o, P_1 existiert nach (12.2) ein Coegalisator $K: F_\Omega \longrightarrow C$, und man definiert $\Phi(\Omega,\Gamma) := C$. Weiter sei $\psi(\Omega,\Gamma) : (\Omega,\Gamma) \longrightarrow (\Omega_C, \Gamma_C)$ definiert durch $\psi(\Omega,\Gamma) := (\kappa,\lambda)$ mit $\kappa := U(K)\ \eta(\Omega)$ und dem zugehörigen λ, von dessen Existenz man sich leicht überzeugt. Ist dann $(\alpha,\beta) : (\Omega,\Gamma) \longrightarrow (\Omega_A, \Gamma_A)$

für eine algebraische Theorie A in $\mathcal{GlTyp}_{\mathbb{S}}$, so ist Existenz und Eindeutigkeit eines $J: C \longrightarrow A$ mit $\Psi(J)\ \psi(\Omega,\Gamma) = (\alpha,\beta)$ zu zeigen. Zunächst gibt es genau ein $J': F_\Omega \longrightarrow A$ mit $U(J')\ \eta(\Omega) = \alpha$. Man rechnet dann sofort die Gleichung $U(J'\circ P_o)\ \eta(\Gamma) = U(J'\circ P_1)\ \eta(\Gamma)$ nach, so daß $J'\circ P_o = J'\circ P_1$ gilt und somit genau ein J mit $J\circ K = J'$ existiert. Aus $\alpha_J\ \kappa = U(J\circ K)\ \eta(\Omega) = \alpha$ folgt dann $\Psi(J)\ \psi(\Omega,\Gamma) = (\alpha,\beta)$, und J wird hierdurch eindeutig bestimmt. Damit erhält man vermöge der Einheit ψ den Linksadjungierten Φ zu Ψ. Für jede algebraische Theorie A liefert die zugehörige Coeinheit einen Morphismus von Theorien $\phi(A): \Phi\circ\Psi(A) \longrightarrow A$, der sich als Isomorphismus erweist; weil Ψ offenbar treu ist, ergibt sich das unmittelbar aus dem

(12.4) LEMMA: Zu jeder algebraischen Theorie A existiert ein Morphismus von Theorien $K_A : A \longrightarrow \Phi\circ\Psi(A)$ mit $\Psi(K_A) = \psi(\Psi(A))$.

Beweis: Wie oben ist $\psi(\Psi(A)) = (\kappa,\lambda)$ mit $\kappa = U(K)\ \eta(\Omega_A)$. Zu zeigen ist, daß durch $K_A(\omega) := \langle\kappa(n)(\pi^A_{i,k}\ \omega) : i\in k\rangle$ für $\omega\in A(A^n,A^k)$, o.B.d.A. $k \neq 0$, ein Funktor K_A definiert wird.[1] Ist noch $\omega'\in A(A^k,A^1)$ gegeben, so folgt $J_A(\eta(\Omega_A)(k)(\omega')\ \langle\eta(\Omega_A)(n)(\pi^A_{i,k}\ \omega) : i\in k\rangle) = J_A(\eta(\Omega_A)(n)(\omega'\ \omega))$ und somit

$$\begin{aligned} K_A(\omega')\ K_A(\omega) &= K(\eta(\Omega_A)(k)(\omega')\ \langle\eta(\Omega_A)(n)(\pi^A_{i,k}\ \omega) : i\in k\rangle) \\ &= K(\eta(\Omega_A)(n)(\omega'\ \omega)) \\ &= K_A(\omega'\ \omega)\ . \end{aligned}$$

Schließlich erhält man wegen $J_A(\eta(\Omega_A)(k)(\pi^A_{i,k})) = \pi^A_{i,k} = J_A(\pi^{F(\Omega_A)}_{i,k})$ die Gleichung $K_A(\pi^A_{i,k}) = K(\pi^{F(\Omega_A)}_{i,k}) = \pi^{\Phi\circ\Psi(A)}_{i,k}$ und somit einen Morphismus von Theorien.

[1] Mit spitzen Klammern werden stets induzierte Morphismen in direkte Produkte bezeichnet.

Obwohl sich in § 13 ergeben wird, daß Gleichungstypen und algebraische Theorien zu den gleichen Algebrenkategorien führen und somit "semantisch äquivalent" sind, ist der Funktor Ψ aus (12.3) keine Äquivalenz von Kategorien. Das liegt daran, daß man aus jedem Gleichungstyp (Ω,Γ) in trivialer Weise einen Gleichungstyp (Ω',Γ') mit $(\Omega,\Gamma) \not\cong (\Omega',\Gamma')$ und $\Phi(\Omega,\Gamma) \cong \Phi(\Omega',\Gamma')$ gewinnen kann, indem man beispielsweise für alle $n\in\mathbb{S}$ zu den Operationen in $\Omega(n)$ n weitere hinzunimmt, die man vermöge $\Gamma'(n)$ gerade mit den n-stelligen Projektionen in $F_{\Omega'}$ identifiziert.

Die in (12.3) formal beschriebene und daher äußerlich ein wenig kompliziert erscheinende Beziehung zwischen Gleichungstypen und algebraischen Theorien besitzt einen recht einfachen und plausiblen Hintergrund. Jeden Gleichungstyp (Ω,Γ) kann man offenbar o.B.d.A. als <u>reduziert</u> annehmen, d.h. in den $\Omega(n)$ kommen keine Paare formal verschiedener Operationen ω, ω' vor, die durch das Gleichungssystem ohnehin wieder identifiziert werden, genauer: Sind ω und ω' äquivalent unter der von $R := \bigvee_{n\in\mathbb{S}} \Gamma(n)$ in F_Ω erzeugten, kompatiblen Äquivalenzrelation, so ist schon $\omega = \omega'$. Das erreicht man natürlich stets durch Übergang zu den entsprechenden Äquivalenzklassen.

In der Sprache von (12.3) sind die reduzierten Gleichungstypen gerade diejenigen (Ω,Γ), für die die erste Komponente der Adjunktionseinheit $\psi(\Omega,\Gamma)$ punktweise injektiv ist. Für reduzierte Gleichungstypen erhält (12.3) dann die Bedeutung einer <u>Hüllenbildung</u>

$$(\Omega,\Gamma) \hookrightarrow \overline{(\Omega,\Gamma)} := \Psi\circ\Phi(\Omega,\Gamma)\ ,$$

die einem gewährleistet, daß man die formalen Operationen parallel- und hintereinanderschalten kann, d.h. mit $\omega\in\Omega(k)$ und $\omega_i\in\Omega(n)$, $i\in k$, existiert eine Operation $\omega\ \langle\omega_i : i\in k\rangle$ in $\Omega(n)$, so daß – weil man die n-stelligen Projektionen als triviale Operationen hinzugenommen hat –

insbesondere "Variablentransformationen" möglich sind, und die die formalen Gleichungen in $\Gamma(n)$ als kommutative Diagramme beschreibt. Es ist dann unmittelbar klar, daß $\mathit{AlgTh}_{\mathbb{S}}$ äquivalent zur Unterkategorie der im Sinne dieser Hüllenbildung abgeschlossenen Gleichungstypen in $\mathit{GlTyp}_{\mathbb{S}}$ ist und somit die Theorie der algebraischen Theorien lediglich eine kategorielle "Umformulierung" der universellen Algebra bedeutet, die freilich (für den Kategoriker) eine sehr viel elegantere Beschreibung ermöglicht.

(12.3) gestattet es, effektiv zu jedem Gleichungstyp eine algebraische Theorie anzugeben und umgekehrt. Ebenso effektiv kann man eine Verbindung zwischen algebraischen Theorien und Monaden über Me herstellen (vgl.z.B. [70]): Ist Card die volle Unterkategorie der Kardinalzahlen in Me und $A\colon \mathit{Card}^* \longrightarrow A$ eine algebraische Theorie zu $\mathbb{S} = \mathbb{K}$, so hat der zu A duale Funktor $A^*\colon \mathit{Card} \longrightarrow A^*$ als Rechtsadjungierten den Funktor $|-|\circ A(-,A^1)\circ \omega_A^{-1}$; dabei ist $|-|\, : \mathit{Me} \longrightarrow \mathit{Card}$ eine fest ausgewählte Äquivalenz und $\omega_A\colon A \longrightarrow A^*$ der Dualitätsfunktor von A. Deshalb ist der Inklusionsfunktor $\langle \mathit{Card}, \mathit{Clone}_{LA}\rangle \hookrightarrow \mathit{AlgTh}$ eine Äquivalenz. Außerdem ist (vgl.(1.15))

$$\langle \mathit{Card}, \mathit{Clone}_{LA}\rangle \sim \mathit{Mon}(\mathit{Card}) \quad \text{und} \quad \mathit{Mon}(\mathit{Card}) \sim \mathit{Mon}(\mathit{Me}).$$

Es sei

$$\Xi : \mathit{Mon}(\mathit{Me}) \longrightarrow \mathit{AlgTh}$$

der Funktor, der jeder Monade t über Me die folgende algebraische Theorie zuordnet: Man bildet den zum Kleisli-Funktor $F_t\colon \mathit{Me} \longrightarrow \mathit{Me}_t$ dualen Funktor und betrachtet in $(\mathit{Me}_t)^*$ die volle, von den $F_t(n)$, $n\in\mathbb{K}$, erzeugte Unterkategorie, d.h. man bildet das volle Bild des zu $\mathit{Card} \hookrightarrow \mathit{Me} \longrightarrow \mathit{Me}_t$ dualen Funktors. Umgekehrt erhält man, wie oben beschrieben, zu jeder algebraischen Theorie A eine Monade $\Theta(A)$ über Me. Es folgt dann:

<u>(12.5)</u> <u>THEOREM</u> (vgl.[70]): Ξ und Θ sind zueinander adjungierte Äquivalenzen.

Mit Hilfe der Bemerkung im Anschluß an (12.2) ergibt sich insbesondere, daß $\mathit{Mon}(\mathit{Me})$ Coegalisatoren und reguläre Bilder hat und vollständig ist. (Für jede vollständige Kategorie K ist $\mathit{Mon}(K)$ vollständig!)

Um den Zusammenhang zwischen algebraischen Theorien und Monaden über Me auch für kleines $\mathbb{S}$ zu erhalten, benötigt man ein Verfahren, eine algebraische Theorie zu $\mathbb{S}$ zu einer Theorie zu $\mathbb{K}$ minimal zu erweitern. Weil wir dabei die in (12.1) und (12.3) bereitgestellten Hilfsmittel auch für $\mathbb{S} = \mathbb{K}$ benötigen, wollen wir zunächst prüfen, inwieweit die Kleinheitsvoraussetzung für $\mathbb{S}$ wesentlich ist. Zwar hätte dann F_Ω i.a. keine kleinen Hom-Klassen mehr, jedoch kann durch Quotientenbildung nach den Gleichungen Γ durchaus eine (zulässige) algebraische Theorie (mit kleinen Hom-Klassen) entstehen. Im folgenden verwenden wir daher die Konstruktionen aus (12.1) und (12.3) auch für $\mathbb{S} = \mathbb{K}$ (mit denselben Bezeichnungen) und zeigen anschließend mit der Darstellung (12.6.3) die Zulässigkeit dieser Vorgehensweise.

Über das volle Bild erhält man für $1\in\mathbb{S}_o \subset \mathbb{S}_1 \subset \mathbb{K}$ einen offensichtlichen "Einschränkungsfunktor" $\Sigma := \Sigma_{\mathbb{S}_o,\mathbb{S}_1} : \mathit{AlgTh}_{\mathbb{S}_1} \longrightarrow \mathit{AlgTh}_{\mathbb{S}_o}$; dabei sei $\Sigma(A_1)$ für $A_1\colon S_1 \longrightarrow A_1$ so fixiert, daß $\mathrm{Cob}(\Sigma(A_1))$ eine volle Unterkategorie von A_1 ist. Dann gilt:

<u>(12.6)</u> <u>THEOREM:</u> $\mathbb{S}_o$ sei klein. Ist auch $\mathbb{S}_1$ klein oder ist $\mathbb{S}_1 = \mathbb{K}$, so hat Σ einen treuen Linksadjungierten Λ; ist $\mathbb{S}_o$ sogar regulär, so ist Λ auch voll. (Dabei nennen wir eine Menge (!) $\mathbb{S}$ von Kardinalzahlen <u>regulär</u>, wenn $1\in\mathbb{S}$ ist und wenn mit $n_i\in\mathbb{S}$, $i\in k\in\mathbb{S}$, auch $\coprod_{i\in k} n_i \in \mathbb{S}$ ist.)

Beweis: Ist $A_o\colon S_o \longrightarrow A_o$ eine algebraische Theorie , so wird $\Psi_{\mathbb{S}_o}(A_o) = (\Omega_{A_o},\Gamma_{A_o})$ trivial zu einem Gleichungstyp (Ω,Γ) zu $\mathbb{S}_1$ fortgesetzt: Für $n\in\mathbb{S}_1 \setminus \mathbb{S}_o$ sei $\Omega(n) := \Gamma(n) := \emptyset$, und für $n\in\mathbb{S}_o$ sei $\Omega(n) := \Omega_{A_o}(n)$ und $\Gamma(n) := \{(J(\omega),J(\omega') : (\omega,\omega')\in\Gamma_{A_o}(n)\}$; dabei sei $J\colon F_{\mathbb{S}_o}(\Omega_{A_o}) \longrightarrow \Sigma(F_{\mathbb{S}_1}(\Omega))$ durch $J_{n,1}\,\eta_{\mathbb{S}_o}(\Omega_{A_o})(n) = \eta_{\mathbb{S}_1}(\Omega)(n)$ bestimmt $(\eta_{\mathbb{S}_i}: \mathrm{Id} \longrightarrow U_{\mathbb{S}_i}\circ F_{\mathbb{S}_i}$, $i=0,1$, ist die Adjunktionseinheit (12.1)). Es sei nun $\Lambda(A_o) := A_1 := \Phi_{\mathbb{S}_1}(\Omega,\Gamma)$. Wie in (12.3) werde dann mit $\kappa_1 = U_{\mathbb{S}_1}(K_1)\,\eta_{\mathbb{S}_1}(\Omega)$ die erste Komponente der Adjunktionseinheit $\psi_{\mathbb{S}_1}(\Omega,\Gamma) : (\Omega,\Gamma) \longrightarrow \Psi_{\mathbb{S}_1}(A_1)$

bezeichnet. Indem man sich von der Gültigkeit der Gleichung

$$J_{\Sigma(A_1)} \circ F_{\mathbb{S}_o}(\mu_o) = \Sigma(K_1) \circ J$$

überzeugt, zeigt man, daß durch $\mu_o(n) := \kappa_1(n)$, $n \in \mathbb{S}_o$, ein Morphismus von Gleichungstypen $(\mu_o, \nu_o) : \Psi_{\mathbb{S}_o}(A_o) \longrightarrow \Psi_{\mathbb{S}_o}(\Sigma(A_1))$ definiert wird. Mit dem nach (12.3) durch $\Psi_{\mathbb{S}_o}(\tilde{E}) = (\mu_o, \nu_o)$ bestimmten Morphismus von Theorien $\tilde{E} : A_o \longrightarrow \Sigma(A_1)$ setzt man dann $E := I_{A_1} \circ \tilde{E}$; dabei gehört die Inklusion I_{A_1} zur Zerlegung $A_1 \circ In = I_{A_1} \circ \Sigma(A_1)$. E ist ein auf den Objekten injektiver Funktor, der das Diagramm

(12.6.1)
$$\begin{tikzcd} S_o \arrow[r, hook, "In"] \arrow[d, "A_o"'] & S_1 \arrow[d, "A_1"] \\ A_o \arrow[r, "E"'] & A_1 \end{tikzcd}$$

kommutativ macht. Offenbar genügt es jetzt, zu zeigen:

Für jede algebraische Theorie $C_1 : S_1 \longrightarrow C_1$ und jeden Funktor

(12.6.2) $D : A_o \longrightarrow C_1$ mit $C_1 \circ In = D \circ A_o$ gibt es genau einen Funktor

$F : A_1 \longrightarrow C_1$ mit $F \circ A_1 = C_1$ und $F \circ E = D$.

D läßt sich einschränken zu einem Morphismus von Theorien $\tilde{D} : A_o \longrightarrow \Sigma(C_1)$. Weil nun, wie man leicht zeigt,

$$\tilde{D} \circ J_{A_o} = \Sigma(J_{C_1}) \circ F_{\mathbb{S}_1}(\delta_1) \circ J$$

ist, induziert D einen Morphismus von Gleichungstypen $(\delta_1, \varepsilon_1) : (\Omega, \Gamma) \longrightarrow \Psi_{\mathbb{S}_1}(C_1)$, so daß es genau einen Morphismus von Theorien $F : A_1 \longrightarrow C_1$ mit $F \circ E = D$ gibt.

Somit besitzt Σ einen Linksadjungierten mit der Adjunktionseinheit $\sigma(A_o) = \tilde{E}$. Diese ist ein Monomorphismus (Isomorphismus), wenn E treu (und voll) ist. Daß E treu ist, folgert man aus (12.6.2). Zu $n \in \mathbb{S}_o$ gibt es nämlich einen Funktor F_n mit $F_n \circ E = A_o(A_o^n, -)$, wobei wir den Funktor $A_o(A_o^n, -)$ auf die volle, von den Mengen $A_o(A_o^n, A_o^1)^k$, $k \in \mathbb{S}_1$, in Me erzeugte Unterkategorie nachbeschränkt haben (man setzt in (12.6.2) $C_1 := \widehat{A_o(A_o^n, A_o^1)}$: vgl. Vorbemerkung zu (13.1)). Sind dann ω_o, $\omega_o' \in A_o(A_o^n, A_o^1)$ mit $E(\omega_o) = E(\omega_o')$, so folgt $\omega_o = A_o(A_o^n, \omega_o)(A_o^n) = A_o(A_o^n, \omega_o')(A_o^n) = \omega_o'$.

Zum Nachweis, daß E voll ist, ist man versucht, ebenso vorzugehen. Tatsächlich ist für $\omega_1 \in A_1(A_1^n, A_1^1)$ $F_n(\omega_1)(A_o^n) \in A_o(A_o^n, A_o^1)$. Um aber die Gleichung $E(F_n(\omega_1)(A_o^n)) = \omega_1$ zu zeigen, benötigt man eine Darstellung für ω_1, der man auch unmittelbar entnimmt, daß E voll ist:

Ist $\mathbb{S}_o$ regulär[1], so hat jedes $\omega_1 \in A_1(A_1^n, A_1^1)$, $n \in \mathbb{S}_1$, eine Dar-

(12.6.3) stellung $\omega_1 = E(\omega_o)\, A_1(f)$

mit $\omega_o \in A_o(A_o^k, A_o^1)$, $k \in \mathbb{S}_o$, und $f : n \longrightarrow k$ in S_1.

Zum Nachweis von (12.6.3) benötigt man (erstmals) die explizite Konstruktion aus (12.1) und hat eine ordinale Induktion durchzuführen. Dabei ergibt sich als einziger nicht-trivialer Beweisschritt, die Existenz der Darstellung (12.6.3) für $\omega_1 = \tau_1\, \sigma_1$ mit $\sigma_1 = \langle \sigma_{1,j} : j \in m \rangle$ zu zeigen, wobei $\sigma_{1,j} = E(\sigma_{o,j})\, A_1(f_j)$ und $\tau_1 = E(\tau_o)\, A_1(g)$ mit $\sigma_{o,j} \in A_o(A_o^{k_j}, A_o^1)$ und $\tau_o \in A_o(A_o^k, A_o^1)$ vorausgesetzt werden darf.

$$\begin{tikzcd} & & n \arrow[dll, "A_1(f_{g^*(i)})"'] \arrow[d, "A_1(f)"] \arrow[drr, "\sigma_1"] & & \\ k_{g^*(i)} \arrow[dd, "E(\sigma_{o,g^*(i)})"'] & & \sum\limits_{i \in k} k_{g^*(i)} \arrow[ll, "E(\pi_i)"] \arrow[d, "E(\sigma_o)"] & & m \arrow[dll, "A_1(g)"] \arrow[dd, "\tau_1"] \\ & & k \arrow[dll, "E(\pi_{i,k})"] \arrow[d, "E(\tau_o)"] & & \\ 1 & & 1 \arrow[ll, equal] & & 1 \arrow[ll, equal] \end{tikzcd}$$

Nach Voraussetzung existiert in $\mathbb{S}_o$ die Kardinalzahl $\sum_{i \in k} k_{g^*(i)}$; dabei sei $g^* : k \longrightarrow m$ die g zugrundeliegende Abbildung in Me. Mit den induzierten Morphismen $f = \langle f_{g^*(i)} : i \in k \rangle$ und $\sigma_o = \prod_{i \in k} \sigma_{o,g^*(i)}$ gilt dann $\omega_1 = E(\tau_o\, \sigma_o)\, A_1(f)$.

---

[1] Ist $\mathbb{S}_o$ klein, aber nicht regulär, und $\mathbb{S}_1 = \mathbb{K}$, so wählt man zum Nachweis der "Zulässigkeit" von A_1 ein reguläres $\mathbb{S}_2$ mit $\mathbb{S}_o \subset \mathbb{S}_2 \subset \mathbb{K}$ und konstruiert A_1 schrittweise: $A_1 = \Lambda_{\mathbb{S}_o, \mathbb{S}_2} \Lambda_{\mathbb{S}_2, \mathbb{K}}(A_o)$.

(12.7) BEMERKUNGEN:

(1) In [53] 3.3 nimmt Pareigis die Darstellung (12.6.3) im Falle $\mathbb{S}_o = \mathbb{N}$ und $\mathbb{S}_1 = \mathrm{Ob}\mathcal{Me}$ (unsere Beschränkung auf Kardinalzahlen ist unwesentlich) zum Anlaß, die Kategorie A_1 ad hoc zu konstruieren. Dabei nutzt er folgende Eindeutigkeitseigenschaft der Darstellung (12.6.3) aus:

> Ist $\mathbb{S}_o$ die Menge aller Kardinalzahlen unterhalb einer unendlichen, regulären Kardinalzahl, so folgt aus
>
> (12.7.1) $$E(\omega_o)\ A_1(f) = E(\omega'_o)\ A_1(f')$$
>
> die Existenz von Morphismen g, g' in S_o und h in S_1, die folgendes Diagramm kommutativ machen:

$$\begin{tikzcd}
 & n \arrow[dl, "A_1(f)"'] \arrow[d, "A_1(h)"] \arrow[dr, "A_1(f')"] & \\
k \arrow[dr, "E(\omega_o)"'] & m \arrow[l, "E\circ A_o(g)"] \arrow[r, "E\circ A_o(g')"'] & k' \arrow[dl, "E(\omega'_o)"] \\
 & 1 &
\end{tikzcd}$$

(2) Der Linksadjungierte zu Σ läßt sich so bestimmen, daß er $\mathcal{AlgTh}_{\mathbb{S}_o}$ als (volle) coreflexive Unterkategorie in $\mathcal{AlgTh}_{\mathbb{S}_1}$ einbettet.

(3) Bedingung (12.6.2) charakterisiert Diagramm (12.6.1) als "Pushout mit Nebenbedingung". Außerdem ist (12.6.1) ein Pullback in $\mathcal{Cat}$.

(4) Läßt man als "algebraische Theorien zu $\mathbb{S}$" allgemeiner alle Clones mit Bereich S zu, so definiert man einen Linksadjungierten zu

$$\tilde{\Sigma} : \langle S_1, \mathcal{Clone}\rangle \longrightarrow \langle S_o, \mathcal{Clone}\rangle$$

dadurch, daß man verlangt, daß (12.6.1) ein Pushout in $\mathcal{Cat}$ ist (vgl. (A.3)(3) und (11.2) sowie [83]). Der Funktor E ist dann natürlich injektiv auf den Objekten. Er ist auch voll, weil sich jedes Element $\omega_1 \in A_1$ in der Form $\omega_1 = \prod_{i=1}^{r} P\circ I_{\nu_i}(x^i_{\nu_i})$ mit $r \in \mathbb{N}$, $\nu_i \in \{0,1\}$ und $x^i_{\nu_i} \in A_o$ für $\nu_i = 0$ und $x^i_{\nu_i} \in S_1$ für $\nu_i = 1$ darstellen läßt; dabei sind I_o, I_1 die Injektionen des Coprodukts $A_o \amalg S_1$, und P ist Coegalisator zu $I_o\circ A_o$, $I_1\circ \mathrm{In}$ ($E = P\circ I_o$, $A_1 = P\circ I_1$). Ist A_o sogar eine algebraische Theorie,

so ist E auch treu.

Wir fassen (12.5) und (12.6) zusammen:

(12.8) KOROLLAR: $\Xi_{\mathbb{S}} := \Sigma_{\mathbb{S},K}\circ\Xi : \mathcal{Mon}(\mathcal{Me}) \longrightarrow \mathcal{AlgTh}_{\mathbb{S}}$ besitzt für **kleines $\mathbb{S}$ einen treuen Linksadjungierten $\Theta_{\mathbb{S}}$; für reguläres $\mathbb{S}$ ist $\Theta_{\mathbb{S}}$ auch voll.**

Wählt man speziell $\mathbb{S} = \{1\}$, so ist $\mathcal{AlgTh}_{\mathbb{S}}$ isomorph zur Kategorie der (gewöhnlichen) Monoide, so daß (12.8) eine überaschende Folgerung enthält:

(12.9) KOROLLAR: Die Kategorie der Monoide läßt sich als volle, coreflexive Unterkategorie in die Kategorie der Monaden über $\mathcal{Me}$ einbetten.

Der Funktor $\Theta_1 := \Theta_{\{1\}}$: Monoide $\longrightarrow \mathcal{Mon}(\mathcal{Me})$ ist wohlbekannt und wird bereits von Manes [50],(2.3) eingeführt; dort wird jedoch nicht erwähnt, daß es sich um eine volle, coreflexive Einbettung handelt. Für ein Monoid $M = (M,e,m)$ mit Einselement e und Multiplikation m sei $\Theta_1(M) := (T,\eta,\mu)$ mit (abgesehen von kanonischen Isomorphismen) $T := M \times (-)$, $\eta(X) := \langle e,X\rangle$ und $\mu(X) := m \times X$ ($X \in \mathrm{Ob}\mathcal{Me}$); jeder Monoidhomomorphismus $\phi: M_o \longrightarrow M_1$ induziert einen Morphismus $\Theta_1(\phi): \Theta_1(M_o) \longrightarrow \Theta_1(M_1)$ in $\mathcal{Mon}(\mathcal{Me})$. Die Eilenberg-Moore-Kategorie über $\Theta_1(M)$ ist die Kategorie der Mengen, auf denen das Monoid M assoziativ und unitär operiert.

Es sei nun $A := \Xi(\Theta_1(M))$ $\mathcal{Card}^* \longrightarrow A$ die in (12.5) definierte algebraische Theorie. Bis auf Isomorphie ist, wie man anhand der Kleisli-Konstruktion leicht sieht, $A(A^k,A^1) = M \times k$ mit den Projektionen $\pi_{i,k} = (e,i)$ und der Kompositionsregel $(x,i_o)\langle (y_i,j_i) : i \in k\rangle = (m(x,y_{i_o}),j_{i_o})$.
Der Funktor $E: M \longrightarrow A$ (M wird als Kategorie mit dem einzigen Objekt e aufgefaßt) mit $E(x) = (x,0)$ $(0 \in 1)$ macht nun das Diagramm

$$
\begin{tikzcd}
\{1\} \arrow[r, hook] \arrow[d, "e"'] & \mathbb{K} \arrow[d, "A"] \\
M \arrow[r, "E"] & \mathcal{A}
\end{tikzcd}
$$

zu einem Pushout mit Nebenbedingung (12.6.2), so daß der in [50] beschriebene Funktor tatsächlich der nach (12.8) existierende, treue und volle Linksadjungierte ist.

Die bisher in diesem Paragraphen hergestellten Adjunktionen erhalten ihre eigentliche Bedeutung erst, wenn man die zugehörigen Algebrenkategorien betrachtet (§13). In allen Fällen wird sich ergeben, daß die hier beschriebenen Operatoren für die Theorien oder Typen verträglich sind mit dem Übergang zur zugehörigen Modellkategorie. Das gilt auch für die Konstruktion des Tensorprodukts von algebraischen Theorien (zu $\mathbb{S}$), das wir zum Abschluß völlig analog zur Vorgehensweise in der kommutativen Algebra einführen wollen.

Im folgenden sei $\mathbb{S}$ stets regulär, so daß mit $n, m \in \mathbb{S}$ insbesondere auch $n \cdot m := |n \times m| \in \mathbb{S}$ ist. Man definiert einen Funktor $M^* : \mathcal{S}^* \times \mathcal{S}^* \longrightarrow \mathcal{S}^*$ durch $M(f,g) := \beta_{n',m'}(f \times g)\,\beta_{n,m}^{-1}$ für alle $(f,g) : (n,m) \longrightarrow (n',m')$; dabei seien die $\beta_{n,m} : n \times m \longrightarrow n \cdot m$ fest ausgewählte Bijektionen mit $\beta_{n,m}(i,j) = \beta_{m,n}(j,i)$; $M : \mathcal{S} \times \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$ sei der zu M^* duale Funktor.

Ist $A : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{A}$ eine algebraische Theorie, so ist $A^{n \cdot m}$ eine n-fache Potenz von A^m vermöge der Projektionen $\tau^A_{i,n,m} : A^{n \cdot m} \longrightarrow A^m$ mit $\pi^A_{j,m}\,\tau^A_{i,n,m} = \pi^A_{i*j,n \cdot m}$, $i \in n \in \mathbb{S}$, $j \in m \in \mathbb{S}$; dabei ist $i*j := \beta_{n,m}(i,j)$ gesetzt ($\beta_{n,1}$ sei so gewählt, daß $\tau^A_{i,n,1} = \pi^A_{i,n}$ ist). Für jedes $\omega : A^m \longrightarrow A^k$ entsteht dann eine n-fache Potenz $\omega^n : A^{n \cdot m} \longrightarrow A^{n \cdot k}$.

Sind A, B, C algebraischen Theorien zu $\mathbb{S}$, so heißt ein Bifunktor N:

$\mathcal{A} \times \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$ <u>Theoriebimorphismus</u>, wenn das folgende Diagramm kommutativ ist:

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{S} \times \mathcal{S} \arrow[r, "M"] \arrow[d, "A \times B"'] & \mathcal{S} \arrow[d, "C"] \\
\mathcal{A} \times \mathcal{B} \arrow[r, "N"] & \mathcal{C}
\end{tikzcd}
$$

Ein Tensorprodukt zu A, B liegt nun vor, wenn dieses Diagramm sogar ein "Pushout mit Nebenbedingung" ist, genauer:

(<u>12.10</u>) <u>DEFINITION</u>: $A : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{A}$ und $B : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{B}$ seien algebraische Theorien (zu $\mathbb{S}$). $(- \bullet -, A \bullet B)$ heißt <u>Tensorprodukt</u> von A und B, wenn gilt:

(1) $A \bullet B : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{A} \bullet \mathcal{B}$ ist eine algebraische Theorie zu $\mathbb{S}$ und $- \bullet - : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A} \bullet \mathcal{B}$ ein Theoriebimorphismus.

(2) Für jede algebraische Theorie $C : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{C}$ und jeden Theoriebimorphismus $N : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$ gibt es genau einen Morphismus algebraischer Theorien $K : A \bullet B \longrightarrow C$ mit $K \circ (- \bullet -) = N$.

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \times \mathcal{B} \arrow[r, "- \bullet -"] \arrow[dr, "N"'] & \mathcal{A} \bullet \mathcal{B} \arrow[d, "K"] \\
& \mathcal{C}
\end{tikzcd}
$$

(<u>12.11</u>) <u>THEOREM</u>: Je zwei algebraische Theorien zu $\mathbb{S}$, $\mathbb{S}$ regulär, besitzen ein Tensorprodukt.

Beweis: Für alle $n \in \mathbb{S}$ sei $\Omega(n) := \Omega_A(n) \cup \Omega_B(n)$ und

$$
\begin{aligned}
\Gamma(n) := {} & \{(I_A(\omega), I_A(\omega')) : (\omega,\omega') \in \Gamma_A(n)\} \cup \{(I_B(\omega), I_B(\omega')) : (\omega,\omega') \in \Gamma_B(n)\} \\
& \cup \{(\eta(\Omega)(n)(\pi^A_{i,n}), \eta(\Omega)(n)(\pi^B_{i,n})) : i \in n\} \\
& \cup \{(\eta(\Omega)(s)(\beta)\ \eta(\Omega)(r)(\alpha)^s, \eta(\Omega)(r)(\alpha)\ \eta(\Omega)(s)(\beta)^r) : r, s \in \mathbb{S}, \\
& \qquad r \cdot s = n,\ \alpha \in \Omega_A(r),\ \beta \in \Omega_B(s)\};
\end{aligned}
$$

dabei seien $I_A : F_{\Omega_A} \longrightarrow F_\Omega$, $I_B : F_{\Omega_B} \longrightarrow F_\Omega$ die aus den Inklusionen

$\Omega_A(n) \hookrightarrow \Omega(n)$, $\Omega_B(n) \hookrightarrow \Omega(n)$ entstehenden Theoriemorphismen und $n(\Omega) : \Omega \longrightarrow U(F_\Omega)$ die Adjunktionseinheit (12.1); alle Vereinigungen sind disjunkt zu nehmen. Sezt man nun $A \bullet B := \Phi(\Omega,\Gamma)$, so erhält man offenbar zwei Morphismen von Gleichungstypen $\Psi(A) \longrightarrow \Psi(A \bullet B)$, $\Psi(B) \longrightarrow \Psi(A \bullet B)$, also wegen (12.3) zwei Morphismen von Theorien $E_A : A \longrightarrow A \bullet B$, $E_B : B \longrightarrow A \bullet B$. Für $\alpha \in A(A^r, A^n)$, $\beta \in B(B^s, B^k)$ sei dann

$$\alpha \bullet \beta := E_A(\alpha)^k \, E_B(\beta)^r \quad ;$$

wegen $E_A(\alpha)^k \, E_B(\beta)^r = E_B(\beta)^n \, E_A(\alpha)^s$ wird dadurch ein Theoriebimorphismus definiert. (2.10)(2) folgt daraus, daß jeder Theoriebimorphismus $N: A \times B \longrightarrow C$ einen Morphismus von Gleichungstypen $(\Omega,\Gamma) \longrightarrow \Psi(C)$ induziert.

(12.12) KOROLLAR:

(1) Das Tensorprodukt induziert einen Bifunktor

$$\mathcal{A\ell gTh}_{\mathbb{S}} \times \mathcal{A\ell gTh}_{\mathbb{S}} \longrightarrow \mathcal{A\ell gTh}_{\mathbb{S}} \,.$$

(2) Sind A, B, C algebraische Theorien zu $\mathbb{S}$, so bestehen die folgenden kanonischen Isomorphien (die also Isomorphismen von Funktoren induzieren):

$$A \bullet S \cong A \cong S \bullet A$$
$$A \bullet B \cong B \bullet A$$
$$A \bullet (B \bullet C) \cong (A \bullet B) \bullet C$$

(3) Der durch die Theoriemorphismen $E_A : A \longrightarrow A \bullet B$, $E_B : B \longrightarrow A \bullet B$ mit $E_A(\alpha) = \alpha \bullet B^1$, $E_B(\beta) = A^1 \bullet \beta$ induzierte Morphismus $A \amalg B \longrightarrow A \bullet B$ ist epimorph in $\mathcal{A\ell gTh}_{\mathbb{S}}$.

(4) Für $\mathbb{S} = \mathbb{N}$ ist $- \bullet - : A \times B \longrightarrow A \bullet B$ ein extremer Epimorphismus in $\mathcal{Cat}$, d.h. jedes $\gamma \in A \bullet B$ besitzt eine Darstellung

$$\gamma = (\alpha_1 \bullet \beta_1)(\alpha_2 \bullet \beta_2) \ldots (\alpha_n \bullet \beta_n),\ n \in \mathbb{N} \quad \text{(vgl.(A.1))}.$$

In der Literatur (vgl. [53],[65]) wird ein Tensorprodukt (auch Kronecker-Produkt) für $\mathbb{S} = \mathbb{N}$ ad hoc unter Nachweis der in (12.12)(1)-(3) aufgeführten Eigenschaften eingeführt. Wichtiger ist jedoch die universelle Eigenschaft (12.10), aus denen die anderen folgen.

Wir fassen die Konstruktionen aus §12 in der folgenden Skizze zusammen ($\mathbb{S}$ sei regulär):

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{A\ell gTh}_{\mathbb{S}} \times \mathcal{A\ell gTh}_{\mathbb{S}} \arrow[d, "\otimes"] & & \\
\mathcal{G\ell Typ}_{\mathbb{S}} \arrow[r, dashed, shift right, "\Phi_{\mathbb{S}}"'] & \mathcal{A\ell gTh}_{\mathbb{S}} \arrow[l, shift right, "\Psi_{\mathbb{S}}\text{(treu,voll)}"'] \arrow[d, shift left, "U_{\mathbb{S}}\text{ (schwach monadisch)}"] \arrow[r, dashed, shift right, "\Lambda_{\mathbb{S},\mathbb{K}}\text{(treu,voll)}"'] & \mathcal{A\ell gTh}_{\mathbb{K}} \arrow[l, shift right, "\Sigma_{\mathbb{S},\mathbb{K}}"'] \arrow[r, dashed, shift right, "\Theta"'] & \mathcal{Mon}(\mathcal{Me}) \arrow[l, shift right, "\Xi"'] \arrow[d, shift left, "\Theta_1"] \\
 & \mathcal{Me}^{\mathbb{S}} \arrow[u, dashed, shift left, "F_{\mathbb{S}}"] & & \text{Monoide} \arrow[u, dashed, shift left, "\Lambda_1\text{ (treu,voll)}"]
\end{tikzcd}$$

13. Algebren zu algebraischen Theorien

Wir fixieren weiterhin eine Teilklasse $\mathbb{S}$ von Kardinalzahlen mit $1 \in \mathbb{S}$ und bezeichnen mit S die duale Kategorie der vollen, von $\mathbb{S}$ in $\mathcal{Me}$ erzeugten Unterkategorie.

Eine Kategorie K hat $\mathbb{S}$-Potenzen, wenn für alle $n \in \mathbb{S}$ und $X \in \mathrm{Ob}K$ eine fest ausgewählte n-te Potenz von X in K existiert, die im Falle $n \neq 0$ mit

$$p^X_{i,n} : X^n \longrightarrow X,\ i \in n,$$

bezeichnet wird; dabei sei $p^X_{o,1} = X = X^1$ $(o \in 1)$. Unter X^o ist ein fest ausgewähltes Endobjekt in K zu verstehen. Eine Teilklasse $X \subset K$ heißt abgeschlossen gegen $\mathbb{S}$-Potenzen, wenn für alle $x : X_o \longrightarrow X_1$ in X und $n \in \mathbb{S}$ auch $x^n : X^n_o \longrightarrow X^n_1$ in X ist.

Es sei nun K eine Kategorie mit $\mathbb{S}$-Potenzen. Ist dann A eine algebraische Theorie (zu $\mathbb{S}$), so ist die Kategorie der A-Algebren über K, bezeichnet mit $\mathrm{Alg}(A,K)$, die volle Unterkategorie derjenigen Funktoren H in $[A,K]$, für die $H \circ A$ unter Beibehaltung der festen Auswahl $\mathbb{S}$-Potenzen erhält, d.h.

$H(A^n) = H(A^1)^n$, $n \in \mathbb{S}$, und $H(\pi^A_{i,n}) = p^{H(A^1)}_{i,n}$ für $n \neq 0$.

$$V := V_A : \mathrm{Alg}(A,\mathcal{K}) \longrightarrow \mathcal{K}$$

sei der Auswertungsfunktor auf A^1. Außerdem erhält man einen contravarianten Funktor

$$\mathrm{Alg}(-,\mathcal{K}) : \mathcal{A\ell gTh}_{\mathbb{S}} \longrightarrow \mathcal{Cat} .$$

Ehe wir auf die Eigenschaften der Kategorien $\mathrm{Alg}(A,\mathcal{K})$ näher eingehen, wollen wir ihre "Verträglichkeit" mit den Adjunktionen aus §12 zeigen. Für die Adjunktion (12.3) heißt das, daß die Kategorien $\mathcal{A\ell gTh}_{\mathbb{S}}$ und $\mathcal{G\ell Typ}_{\mathbb{S}}$ isomorphe Modellkategorien besitzen.

Ist $X \in \mathrm{Ob}\mathcal{K}$ ($\mathcal{K}$ mit $\mathbb{S}$-Potenzen), so erhält man durch Übergang zur n-ten Potenz von X einen Produkt-stetigen Funktor $\overline{X} : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{K}$ und daraus durch Übergang zum vollen Bild eine algebraische Theorie $\hat{X} : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{K}_X$. Ist nun (Ω,Γ) ein Gleichungstyp, so heißt (X,α,β) (Ω,Γ)-Birkhoff-Algebra über $\mathcal{K}$, wenn $(\alpha,\beta) : (\Omega,\Gamma) \longrightarrow \Psi(\hat{X})$ ein Morphismus von Gleichungstypen ist. Einem Homomorphismus $\overline{f} : (X,\alpha,\beta) \longrightarrow (Y,\gamma,\delta)$ von (Ω,Γ)-Birkhoff-Algebren liegt ein Morphismus $f : X \longrightarrow Y$ in $\mathcal{K}$ zugrunde, so daß für alle $n \in \mathbb{S}$ und alle $\omega \in \Omega(n)$ das folgende Diagramm kommutativ ist:

$$\begin{tikzcd} X^n \arrow[r, "\alpha(n)(\omega)"] \arrow[d, "f^n"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y^n \arrow[r, "\gamma(n)(\omega)"'] & Y \end{tikzcd}$$

Die entstehende Kategorie der (Ω,Γ)-Birkhoff-Algebren über $\mathcal{K}$ heiße $\mathrm{Alg}_B(\Omega,\Gamma;\mathcal{K})$. Man hat einen Vergißfunktor $V_{(\Omega,\Gamma)} : \mathrm{Alg}_B(\Omega,\Gamma;\mathcal{K}) \longrightarrow \mathcal{K}$. Mit dem Linksadjungierten Φ zu Ψ (vgl. (12.3)) gilt nun das

(13.1) THEOREM: $\mathcal{K}$ sei eine Kategorie mit $\mathbb{S}$-Potenzen, $\mathbb{S}$ klein. Dann gilt:

(1) Ist (Ω,Γ) ein Gleichungstyp (zu $\mathbb{S}$), so gibt es einen Isomorphismus

$$W : \mathrm{Alg}_B(\Omega,\Gamma;\mathcal{K}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Alg}(\Phi(\Omega,\Gamma),\mathcal{K}) \quad \text{mit} \quad V_{\Phi(\Omega,\Gamma)} \circ W = V_{(\Omega,\Gamma)} .$$

(2) Ist A eine algebraische Theorie (zu $\mathbb{S}$), so gibt es einen Isomorphismus

$$Z : \mathrm{Alg}(A,\mathcal{K}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Alg}_B(\Psi(A);\mathcal{K}) \quad \text{mit} \quad V_{\Psi(A)} \circ Z = V_A .$$

Beweis: (1) Man benutzt im wesentlichen den zu (12.3) gehörigen Adjunktionsisomorphismus. Zu jeder Birkhoff-Algebra (X,α,β) gibt es genau ein $J_{(X,\alpha,\beta)} : \Phi(\Omega,\Gamma) \longrightarrow \hat{X}$ mit $\Psi(J_{(X,\alpha,\beta)})\ \psi(\Omega,\Gamma) = (\alpha,\beta)$. Mit dem treuen und vollen Funktor $I_X : \mathcal{K}_X \longrightarrow \mathcal{K}$ (mit $I_X \circ \hat{X} = \overline{X}$, s.o.) setzt man dann $W(X,\alpha,\beta) := I_X \circ J_{(X,\alpha,\beta)}$. Und für $\overline{f} : (X,\alpha,\beta) \longrightarrow (Y,\gamma,\delta)$ wird durch $W(\overline{f})(n) := f^n$ für alle $n \in \mathbb{S}$ ein Morphismus von Funktoren $W(\overline{f}) : W(X,\alpha,\beta) \longrightarrow W(Y,\gamma,\delta)$ definiert. Umgekehrt erhält man zu einer $\Phi(\Omega,\Gamma)$-Algebra H über $\mathcal{K}$ in offensichtlicher Weise einen Morphismus von Theorien $\check{H} : \Phi(\Omega,\Gamma) \longrightarrow \widehat{H(1)}$ und daraus die (Ω,Γ)-Birkhoff-Algebra $W'(H) := (H(1)\ ,\ \Psi(\check{H})\ \psi(\Omega,\Gamma))$. Ein Morphismus von Funktoren $\mu : H_0 \longrightarrow H_1$ bestimmt durch $W'(\mu) := \overline{\mu(1)} : W'(H_0) \longrightarrow W'(H_1)$ einen Homomorphismus von Birkhoff-Algebren. Offenbar sind W und W' invers zueinander.

(2) Nach (12.3) hat man einen Isomorphismus $\phi(A) : \Phi \circ \Psi(A) \longrightarrow A$ und folglich einen Isomorphismus $\mathrm{Alg}(\phi(A),\mathcal{K}) : \mathrm{Alg}(A,\mathcal{K}) \longrightarrow \mathrm{Alg}(\Phi \circ \Psi(A),\mathcal{K})$, der mit den Vergißfunktoren kommutiert. Damit folgt die Behauptung aus (1).

Beim Wechsel zwischen algebraischen Theorien und Monaden über $\mathcal{Me}$ gilt für die Basiskategorie $\mathcal{Me}$ eine zu (13.1) analoge Aussage. Darauf werden wir jedoch erst am Schluß des Paragraphen eingehen. Zunächst notieren wir, daß die in (12.6) vorgenommene "Erweiterung algebraischer Theorien" invariant gegen Algebrenbildung ist:

(13.2) THEOREM: Es sei $\mathbb{S}_0$ klein und $\mathbb{S}_0 \subset \mathbb{S}_1 \subset \mathbb{K}$. Ist auch $\mathbb{S}_1$ klein oder ist $\mathbb{S}_1 = \mathbb{K}$, so gibt es für jede algebraische Theorie $A_0 : \mathcal{S}_0 \longrightarrow A_0$ zu $\mathbb{S}_0$

und jede Kategorie K mit $\mathfrak{S}_1$-Potenzen einen Isomorphismus

$$I: \mathrm{Alg}(\Lambda(A_o),K) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Alg}(A_o,K) \quad \text{mit} \quad V_{A_o} \circ I = V_{\Lambda(A_o)},$$

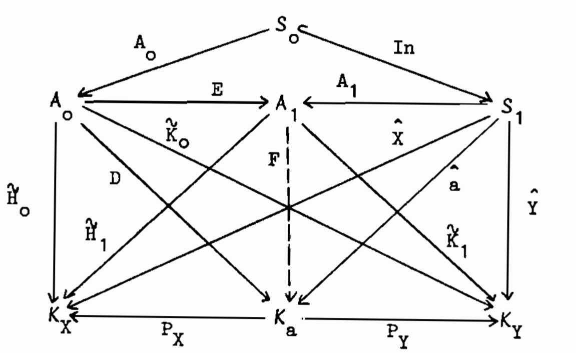
wobei $\Lambda = \Lambda_{\mathfrak{S}_o,\mathfrak{S}_1}$ der Linksadjungierte zu $\Sigma_{\mathfrak{S}_o,\mathfrak{S}_1}$ aus (12.6) sei.

Beweis: Man nimmt $I := \mathrm{Alg}(E,K)$ mit der in (12.6) konstruierten Einbettung E. Dann gibt es zu jedem $H_o \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Alg}(A_o,K))$ genau ein $H_1 \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Alg}(A_1,K))$ mit $I(H_1) = H_o$ $(A_1 := \Lambda(A_o))$. Das ergibt sich aus (12.6.2), indem man dort $C_1 := \hat{X} : S_1 \longrightarrow K_X$ (vgl. (13.1)) mit $X := H_o(A_o^1)$ setzt und für $D: A_o \longrightarrow K_X$ den vermöge der Diagonaleigenschaft des vollen Bildes durch H_o induzierten Funktor $\tilde{H}_o$ wählt. Ist nun $\mathfrak{S}_o$ regulär, so folgt mit (12.6.3) sofort, daß sogar für alle $\alpha_o \in \mathrm{Alg}(A_o,K)$ genau ein $\alpha_1 \in \mathrm{Alg}(A_1,K)$ mit $I(\alpha_1) = \alpha_o$ existiert. Im allgemeinen Fall geht man so vor:

Für jedes $a : X \longrightarrow Y$ in K betrachtet man die algebraische Theorie $\hat{a}$: $S_1 \longrightarrow K_a$ mit

$$K_a(n,k) := \left\{(k,f,g,n) : \begin{tikzcd} X^n \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a^n"'] & X^k \arrow[d, "a^k"] \\ Y^n \arrow[r, "g"'] & Y^k \end{tikzcd} \text{ ist kommutativ}\right\}.$$

Man hat dann offensichtliche Morphismen von Theorien $P_X : \hat{a} \longrightarrow \hat{X}$ und $P_Y : \hat{a} \longrightarrow \hat{Y}$. Ist nun $\alpha_o : H_o \longrightarrow K_o$, so sei $a := \alpha_o(A_o^1)$, und es bleibt zu zeigen, daß durch $\alpha_1(A_1^n) := a^n$ ein Morphismus von Funktoren α_1 : $H_1 = I^{-1}(H_o) \longrightarrow K_1 = I^{-1}(K_o)$ definiert wird.



Weil durch $D(\omega_o) := (k, H_o(\omega_o), K_o(\omega_o), n)$, $\omega_o \in A_o(A_o^n, A_o^k)$, ein Funktor $D: A_o \longrightarrow K_a$ mit $D \circ A_o = \hat{a} \circ \mathrm{In}$ erklärt wird, existiert genau ein $F: A_1 \longrightarrow \hat{a}$ mit $F \circ E = D$. Wegen $P_X \circ F = \tilde{H}_1$ und $P_Y \circ F = \tilde{K}_1$, wobei $\tilde{H}_1$ und $\tilde{K}_1$ den Faktorisierungen von H_1 und K_1 über K_X und K_Y entstammen, erhält man für jedes $\omega_1 \in A_1(A_1^n, A_1^k)$ ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} X^n \arrow[r, "H_1(\omega_1)"] \arrow[d, "a^n"'] & X^k \arrow[d, "a^k"] \\ Y^n \arrow[r, "K_1(\omega_1)"'] & Y^k \end{tikzcd}$$

in K.

Völlig analog beweist man eine (13.2) entsprechende Folgerung für das Tensorprodukt algebraischer Theorien. Dazu müssen wir zunächst für zwei algebraische Theorien $A: S \longrightarrow A$ und $B: S \longrightarrow B$ definieren, was unter einer (A,B)-Bialgebra H in K zu verstehen ist: $H: A \times B \longrightarrow K$ ist ein Bifunktor, der in beiden Komponenten kanonisch Potenzen erhält, genauer:

$$H \circ (A \times B) = \overline{H(A^1,B^1)} \circ M$$

mit dem "Multiplikationsfunktor" $M: S \times S \longrightarrow S$ ($\mathfrak{S}$ sei multiplikativ abgeschlossen) und dem "Potenzfunktor" $\overline{H(A^1,B^1)}: S \longrightarrow K$. Die entstehende volle Unterkategorie von $[A \times B, K]$ heißt $\mathrm{Alg}_{bi}(A,B;K)$ mit dem Auswertungsfunktor $V_{A,B}: \mathrm{Alg}_{bi}(A,B;K) \longrightarrow K$.

(13.3) KOROLLAR: Sind A und B algebraische Theorien zu $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}$ regulär, so gibt es für jede Kategorie K mit $\mathfrak{S}$-Potenzen einen Isomorphismus

$$J: \mathrm{Alg}(A \otimes B, K) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Alg}_{bi}(A,B;K) \quad \text{mit} \quad V_{A,B} \circ J = V_{A \otimes B}.$$

(13.4) BEMERKUNG: J verhält sich in Abhängigkeit von K wie ein Isomorphismus von Funktoren, d.h. sind $\mathcal{K}$ und $\mathcal{K}'$ Kategorien mit $\mathbb{S}$-Potenzen und erhält der Funktor $F: \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}'$ diese Potenzen, so erhält man ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Alg}(A \bullet B,\mathcal{K}) \arrow[r, "\mathrm{Alg}(A \bullet B,F)"] \arrow[d, "J"'] & \mathrm{Alg}(A \bullet B,\mathcal{K}') \arrow[d, "J'"] \\ \mathrm{Alg}_{bi}(A,B;\mathcal{K}) \arrow[r, "\mathrm{Alg}_{bi}(A,B;F)"'] & \mathrm{Alg}_{bi}(A,B;\mathcal{K}') \end{tikzcd}$$

Entsprechendes gilt für die Isomorphismen aus (13.1) und (13.2).

Wir fassen jetzt die wichtigsten Eigenschaften der Kategorien $\mathrm{Alg}(A,\mathcal{K})$ und ihrer Vergißfunktoren zusammen (vgl.z.B. [5], [53], [65], [71], [75]):

(13.5) THEOREM: $A: \mathbb{S} \longrightarrow \mathcal{A}$ sei eine algebraische Theorie zu $\mathbb{S}$ und $\mathcal{K}$ eine Kategorie mit $\mathbb{S}$-Potenzen; dann gilt für $V: \mathrm{Alg}(A,\mathcal{K}) \longrightarrow \mathcal{K}$:

(1) V ist treu und reflektiert Mono-, Epi- und Isomorphismen.

(2) $V^{-1}(\mathrm{Mono}(\mathcal{K}))$ ist die Unterkategorie aller punktweisen Monomorphismen in $\mathrm{Alg}(A,\mathcal{K})$, und es gilt $V^{-1}(\mathrm{Mono}(\mathcal{K})) \subset \mathrm{Init}_V(\mathrm{Alg}(A,\mathcal{K}))$.

(3) Ist $\mathcal{E} \subset \mathrm{Epi}(\mathcal{K})$ abgeschlossen gegen $\mathbb{S}$-Potenzen, so ist $V^{-1}(\mathcal{E})$ die Klasse aller punktweisen $\mathcal{E}$-Morphismen in $\mathrm{Alg}(A,\mathcal{K})$ und $V^{-1}(\mathcal{E}) \subset \mathrm{Fin}_V(\mathrm{Alg}(A,\mathcal{K}))$; insbesondere ist $\mathrm{Alg}(A,\mathcal{K})$ $V^{-1}(\mathcal{E})$-coklein, wenn $\mathcal{K}$ $\mathcal{E}$-coklein ist.

(4) V erzeugt eindeutig Limites; insbesondere ist $\mathrm{Alg}(A,\mathcal{K})$ $(\mathcal{D}$-)vollständig und V $(\mathcal{D}$-)stetig, wenn $\mathcal{K}$ $(\mathcal{D}$-)vollständig ist.

(5) Hat $\mathcal{K}$ Kernpaare, so ist V Mono-Funktor; $\mathrm{Alg}(A,\mathcal{K})$ ist dann Mono-klein, wenn $\mathcal{K}$ es ist.

(6) Hat $\mathcal{K}$ $\mathcal{D}$-Colimites, die mit $\mathbb{S}$-Potenzen vertauschbar sind (d.h. für alle $n \in \mathbb{S}$ ist der n-te Potenzfunktor $\Pi_n : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}$ $\mathcal{D}$-costetig), so erzeugt V eindeutig $\mathcal{D}$-Colimites, und diese sind auch in $\mathrm{Alg}(A,\mathcal{K})$ mit $\mathbb{S}$-Potenzen vertauschbar.

(7) Ist $\mathcal{E} \subset \mathcal{K}$ abgeschlossen gegen $\mathbb{S}$-Potenzen, so erzeugt V eindeutig aus (monomorphen) $\mathcal{E}$-Bildern (monomorphe) $V^{-1}(\mathcal{E})$-Bilder. Hat $\mathcal{K}$ $\mathcal{E}$-Bilder, so ist dann $U_{\mathrm{Alg}(A,\mathcal{K})}(V^{-1}(\mathcal{E})) = V^{-1}(U_{\mathcal{K}}(\mathcal{E}))$.

(8) Ist $\mathrm{Reg\text{-}Epi}(\mathcal{K})$ abgeschlossen gegen $\mathbb{S}$-Potenzen und hat $\mathcal{K}$ Kernpaare oder V einen Linksadjungierten, so erzeugt V eindeutig reguläre Bilder.

(9) V erzeugt eindeutig Coegalisatoren V-absoluter Paare in $\mathrm{Alg}(A,\mathcal{K})$.

(10) V ist genau dann monadisch, wenn V einen Linksadjungierten besitzt.

(11) V besitze einen Linksadjungierten, und $\mathcal{K}$ habe Produkte sowie für eine gegen $\mathbb{S}$-Potenzen abgeschlossene Teilklasse $\mathcal{E} \subset \mathrm{Epi}(\mathcal{K})$ monomorphe $\mathcal{E}$-Bilder. Ist $\mathcal{K}$ $\mathcal{E}$-coklein, so ist $\mathrm{Alg}(A,\mathcal{K}) \subset [A,\mathcal{K}]$ eine volle, reflexive Unterkategorie.

(12) Ist $\mathrm{Alg}(A,\mathcal{K}) \subset [A,\mathcal{K}]$ reflexiv und hat $\mathcal{K}$ Copotenzen, so hat V einen Linksadjungierten.

(13) Hat V einen Linksadjungierten und $\mathrm{Alg}(A,\mathcal{K})$ Coegalisatoren, so ist mit $\mathcal{K}$ auch $\mathrm{Alg}(A,\mathcal{K})$ $(\mathcal{D}$-)covollständig.

(14) $\mathrm{Alg}(A,\mathcal{K})$ hat Coegalisatoren, wenn $\mathcal{K}$ Produkte und für $\mathcal{E} \subset \mathrm{Epi}(\mathcal{K})$, $\mathcal{E}$ abgeschlossen gegen $\mathbb{S}$-Potenzen, monomorphe $\mathcal{E}$-Bilder hat und $\mathcal{E}$-coklein ist.

Die Beweise zu (1) - (10) verlaufen völlig kanonisch. Bei (11) und (12) verwendet man das Dreieck

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Alg}(A,\mathcal{K}) \arrow[rr, hook] \arrow[dr, "V"'] & & {[A,\mathcal{K}]} \arrow[dl, "\tilde{V}"] \\ & \mathcal{K} & \end{tikzcd}$$

mit $\tilde{V}/\mathrm{Alg}(A,\mathcal{K}) = V$. Zwar ist $\tilde{V}$ i.a. nicht treu, aber für $\alpha, \beta : \mathcal{K} \longrightarrow H$

in $[A,K]$ mit $H \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Alg}(A,K))$ folgt aus $\tilde{V}(\alpha) = \tilde{V}(\beta)$ schon $\alpha = \beta$, weil für alle $n \in \mathbb{S}$ $\alpha(A^n) = \alpha(A^1)^n\, k_n = \beta(A^1)^n\, k_n = \beta(A^n)$ mit dem "Vergleichsmorphismus" $k_n : K(A^n) \longrightarrow K(A^1)^n$ ist. Wie eine Beweisanalyse von Thm. (6.8) zeigt, benötigt man zu dessen Anwendung tatsächlich nur diese eingeschränkte Treueeigenschaft. Zum Nachweis der übrigen Bedingungen in (6.8) muß man sich nur noch von der Inklusion $\mathrm{Mono}(\mathrm{Alg}(A,K)) \subset \mathrm{Init}_{\tilde{V}}([A,K])$ überzeugen, wobei man wieder die Morphismen k_n benutzt.

(12) folgt daraus, daß $\tilde{V}$ einen Linksadjungierten $\tilde{F}$ besitzt:

$$\tilde{F}(X)(A^n) \quad := \coprod_{A(A^1,A^n)} X$$

(13) und (14) folgen mit (7.4) und (7.5).

(13.5) zeigt, daß V - abgesehen von der Existenz eines Linksadjungierten - alle charakteristischen Eigenschaften eines monadischen Funktors besitzt. Die Beantwortung der Frage, für welche K ein Linksadjungierter zu V existiert, wird also von entscheidender Bedeutung sein. Das macht auch das folgende Korollar deutlich.

Man sagt, K <u>hat freie Algebren</u> (zu $\mathbb{S}$), falls für alle $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{AlgTh}_{\mathbb{S}})$ ein Linksadjungierter zu $V_A : \mathrm{Alg}(A,K) \longrightarrow K$ existiert.

(<u>13.6</u>) <u>KOROLLAR</u>: K habe Produkte und für $E \subset \mathrm{Epi}(K)$, E abgeschlossen gegen $\mathbb{S}$-Potenzen, monomorphe E-Bilder und sei E-coklein. Dann sind äquivalent:

(i) K hat freie Algebren (zu $\mathbb{S}$).

(ii) <u>Algebraische Funktoren</u> (zu $\mathbb{S}$) sind monadisch, d.h. sind $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{AlgTh}_{\mathbb{S}})$, so ist jeder Funktor

$$W : \mathrm{Alg}(A,K) \longrightarrow \mathrm{Alg}(B,K)$$

mit $V_B \circ W = V_A$ monadisch.

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii) folgt aus (13.5)(14) und (6.11). (ii) $\Rightarrow$ (i): Für

$B = S$ ist $\mathrm{Alg}(B,K) \cong K$.

(<u>13.7</u>) <u>PROPOSITION</u>: Ist $\mathbb{S}$ klein oder $\mathbb{S} = \mathbb{K}$, so hat $\mathcal{Me}$ freie Algebren zu $\mathbb{S}$.

Beweis: Wegen (13.2) genügt es, $\mathbb{S} = \mathbb{K}$ zu betrachten. Dann aber ist (13.7) eine einfache Folgerung aus dem Yoneda-Lemma (vgl. [46]). Explizit kann der Linksadjungierte $F_A : \mathcal{Me} \longrightarrow \mathrm{Alg}(A,\mathcal{Me})$ unter Benutzung einer Äquivalenz $|-| : \mathcal{Me} \longrightarrow \mathcal{Card}^*$ durch $F_A(u) := A(A(|u|),-)$ beschrieben werden. Die induzierte Monade ist gerade $\Theta(A)$ (vgl. (12.5)). In Analogie zu (13.1) folgt daher:

(<u>13.8</u>) <u>KOROLLAR</u>:

(1) Ist A eine algebraische Theorie (zu $\mathbb{K}$), so gibt es einen Isomorphismus $K : \mathrm{Alg}(A,\mathcal{Me}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{Me}^{\Theta(A)}$ mit $G^{\Theta(A)} \circ K = V_A$.

(2) Ist t eine Monade über $\mathcal{Me}$, so gibt es einen Isomorphismus

$$L : \mathcal{Me}^t \xrightarrow{\sim} \mathrm{Alg}(\Xi(t),\mathcal{Me}) \quad \text{mit} \quad V_{\Xi(t)} \circ L = G^t .$$

In Verbindung mit (13.2) ergibt sich, daß (13.8)(1) ebenso für kleines $\mathbb{S}$ anstelle von $\mathbb{K}$ und mit $\Theta_{\mathbb{S}}$ aus (12.8) anstelle von Θ gilt.

Vermöge (13.6) und (13.7) kann man natürlich die in (6.11) begonnene Beispielliste adjungierter Dreiecke erheblich verlängern: Adjunktion einer Eins bei Halbgruppen, Ringen oder Algebren, Bildung der Faktorkommutatorgruppe, der Tensoralgebra, symmetrischen Algebra oder äußeren Algebra (über einem R-Modul), Bildung des Monoidringes oder der Malcewgruppe (über einem Monoid), Grundringerweiterung (für R-Moduln oder -Algebren), Bildung der universellen Einhüllenden bei Lie- oder Jordan-Algebren u.s.w.

Ehe wir nun die über $\mathcal{M}e$ existierenden freien Algebren für eine möglichst große Klasse konkreter Kategorien "liften" (§ 14, 15), notieren wir noch einige einfache Eigenschaften monadischer Kategorien über $\mathcal{M}e$, die zum Teil von der expliziten Darstellung des Linksadjungierten F_A zu V_A für die Kardinalzahlen in $\mathbb{S}$ herrühren: $F_A(n) = A(A^n,-)\colon A \longrightarrow \mathcal{M}e$. ($\mathbb{S}$ sei klein oder $\mathbb{S} = \mathbb{K}$.)

(13.9) KOROLLAR: Ist $0 \in \mathbb{S}$ und ist A eine algebraische Theorie zu $\mathbb{S}$, so besitzt Alg$(A,\mathcal{M}e)$ genau dann ein Nullobjekt, wenn es in A genau eine nullstellige Operation gibt ($|A(A^0,A^1)| = 1$). In diesem Fall ist Alg$(A,\mathcal{M}e)$ monadisch über der Kategorie der punktierten Mengen. Allgemeiner ist im Falle $|A(A^0,A^1)| = n$ Alg$(A,\mathcal{M}e)$ monadisch über der Kategorie $\mathcal{M}e_k$ der k-fach punktierten Mengen für alle $k \leq n$.

Zum Nachweis der letzten Aussage betrachtet man das adjungierte Dreieck

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Alg}(A,\mathcal{M}e) \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathcal{M}e_k = \langle k,\mathcal{M}e\rangle \arrow[dl] \\ & \mathcal{M}e & \end{tikzcd}$$

und wendet (6.11) an.

(13.9) macht deutlich, warum beispielsweise in der Kategorie der Monoide bzw. Ringe ohne Eins Nullobjekte existieren, nicht aber in der Kategorie der Halbgruppen bzw. Ringe mit Eins. Aus (13.9) folgt, daß im Falle $0 \notin \mathbb{S}$ Alg$(A,\mathcal{M}e)$ kein Nullobjekt besitzt. (Die Vervollständigung (12.6) von A bzgl. $\mathbb{S} \cup \{0\}$ besteht einfach in der Adjunktion eines Endobjektes zu A.)

(13.10) KOROLLAR: $\mathbb{S} \setminus \{0,1\}$ sei nicht leer, A sei eine algebraische Theorie zu $\mathbb{S}$ und $F_A\colon \mathcal{M}e \longrightarrow$ Alg$(A,\mathcal{M}e)$ linksadjungiert zu V_A mit der Einheit η_A. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) $A\colon S \longrightarrow A$ ist treu.

(ii) Es gibt ein $n \in \mathbb{S} \setminus \{0,1\}$, so daß die Projektionen $\pi^A_{i,n}$ paarweise

verschieden sind.

(iii) Es gibt ein $H \in$ Ob(Alg$(A,\mathcal{M}e)$) mit $|H(A^1)| > 1$.

(iv) η_A ist punktweiser Monomorphismus.

(v) F_A ist treu.

(vi) A ist nicht isomorph zu einer der beiden sogenannten exzeptionellen algebraischen Theorien E und D, wobei E ein Endobjekt in $\mathcal{A}lg\mathcal{T}h_{\mathbb{S}}$ sei und $D\colon S \longrightarrow \mathcal{D}$ eine algebraische Theorie mit

$$|\mathcal{D}(D^n,D^1)| = \begin{cases} 1 & \text{für } n \neq 0 \\ 0 & \text{für } n = 0 \end{cases} \quad (n \in \mathbb{S})$$

(D ist nur im Falle $0 \in \mathbb{S}$ nicht isomorph zu E).

Zum Beweis vgl. man [53] und [65].

Den folgenden Satz beweist man entweder unmittelbar oder nimmt die Überlegungen aus [1] zur Hilfe.

(13.11) PROPOSITION: Für jede algebraische Theorie A mit Rang besitzt Alg$(A,\mathcal{M}e)$ einen dichten, regulär-projektiven Generator.

Dabei heißt $A\colon \mathcal{C}ard^* \longrightarrow A$ algebraische Theorie mit Rang, wenn es eine Kardinalzahl $r \geq 1$ mit

$$\Lambda_{\mathbb{K}_r,\mathbb{K}} \circ \Sigma_{\mathbb{K}_r,\mathbb{K}}(A) \cong A$$

gibt; $\mathbb{K}_r$ enthalte alle Kardinalzahlen $\leq r$. Zum Beweis von (13.11) bildet man die freie, von r erzeugte A-Algebra.

Weil die in §§14,15 angegebenen Liftungssätze auch für Theorien ohne Rang gültig sind, wurde hier darauf verzichtet, den Rang ρ_A einer algebraischen Theorie A mit Rang definitiv einzuführen und seine kategorielle Bedeutung aufzuzeigen (vgl. [29]). Offenbar bietet sich jedoch im Hinblick auf

(12.6) und (13.2) eine sehr natürliche Definition an, die es einem erlaubt, ρ_A "feiner als in den Abständen regulärer Kardinalzahlen" (wie in der Literatur üblich) zu bestimmen:

ρ_A sei die kleinste Kardinalzahl $\geqslant 1$ mit

$$\Lambda_{\mathbb{K}_{\rho_A},\mathbb{K}} \circ \Sigma_{\mathbb{K}_{\rho_A},\mathbb{K}}(A) \cong A \quad .$$

Vermöge (12.5) ergibt sich natürlich eine Übertragung für Monaden über *Me*.

14. Algebren über Top-Kategorien

Im folgenden betrachten wir stets kommutative Rechtecke des Typs

(14.0.1)
$$\begin{tikzcd} K_1' \arrow[r, "G'"] \arrow[d, "P_1"'] & K_o' \arrow[d, "P_o"] \\ K_1 \arrow[r, "G"] & K_o \end{tikzcd}$$

und beschäftigen uns mit der Frage, wann ein Linksadjungierter F zu G zu einem Linksadjungierten F' zu G' "geliftet" werden kann, derart daß der nach (1.2) entstehende Morphismus von Funktoren μ: $F \circ P_o \longrightarrow P_1 \circ F'$ ein Isomorphismus ist. (14.1) zeigt, daß diese Frage notwendig auf den Begriff des initial stetigen Funktors führt, sogar ohne zuvor irgendwelche "topologischen" Eigenschaften von P_o, P_1 zu verlangen.

(14.0.2)
$$\begin{tikzcd} K_1' \arrow[r, shift left, "G'"] \arrow[d, "P_1"'] & K_o' \arrow[l, dashed, shift left, "F'"] \arrow[d, "P_o"] \\ K_1 \arrow[r, shift left, "G"] \arrow[ur, phantom, "\mu \qquad ="] & K_o \arrow[l, dashed, shift left, "F"] \end{tikzcd}$$

(14.1) PROPOSITION: Diagramm (14.0.2) sei ein Morphismus von Adjunktionen mit $\gamma = P_o \circ G' = G \circ P_1$ und μ Isomorphismus. Dann ist G' initial stetig bzgl. P_1, P_o.

Es liegt eine geringfügige Verallgemeinerung von [60], IV(9.13) vor. Sind nun P_1 und P_o Top-Kategorien, so erweist sich die notwendige Bedingung aus (14.1) auch als hinreichend, wie Wyler [82] gezeigt hat:

(14.2) THEOREM: Sind P_1, P_o Top-Kategorien, so sind für das kommutative Rechteck (14.0.1) folgende Aussagen äquivalent:

(i) G und G' haben Linksadjungierte F und F', so daß mit $\gamma = G \circ P_1 = P_o \circ G'$ und $\mu = F \circ P_o = P_1 \circ F'$ ein Morphismus von Adjunktionen entsteht.

(ii) G' hat einen Linksadjungierten F', und es gibt einen Funktor F: $K_o \longrightarrow K_1$ mit $F \circ P_o = P_1 \circ F'$.

(iii) G' hat einen Linksadjungierten, und für die Rechtsadjungierten I_o und I_1 zu P_o und P_1 gilt $G' \circ I_1 \cong I_o \circ G$.

(iv) G hat einen Linksadjungierten, und G' ist (diskret) initial stetig bzgl. P_1, P_o.

Speziell kann man (14.2) im Falle $G = K_1 = K_o$ anwenden (vgl. [82]). Die Überlegungen vereinfachen sich außerdem, wenn (14.0.1) ein Pullback ist (vgl. [16], [36], [71]):

(14.3) PROPOSITION: Ist Diagramm (14.0.1) ein Pullback, so gilt:

(1) Ist P_o eine identitive $\mathcal{D}$-initiale Überlagerung, so auch P_1, und jeder Kegel $\phi_1 \in [\mathcal{D}, K_1']$ ist genau dann P_1-initial, wenn $G' \circ \phi_1$ P_o-initial ist; dual für final.

(2) Ist P_o eine Top-Kategorie, so auch P_1 (und zwar ist $P_1^* = P_o^* \circ G$; vgl. (2.10)). Die Links- und Rechtsadjungierten zu P_o, P_1 lassen sich so wählen, daß sie mit G, G' kommutieren.

(3) Ist P_o eine identitive Cofaserung und hat G einen Linksadjungierten, so ist P_1 eine identitive Cofaserung, und es gilt (14.2)(i).

(<u>14.4</u>)<u>KOROLLAR</u>:Sind im kommutativen Diagramm (14.0.2) P_o und P_1 Top-Kategorien, ist $(\tilde{P}_o, \tilde{G})$ Pullback zu (G, P_o) und E die eindeutig bestimmte Faktorisierung, so gilt: Die Aussage

$$\begin{tikzcd} K_1' \arrow[rr, "G'"] \arrow[r, "E"] \arrow[dr, "P_1"'] & P \arrow[r, "\tilde{G}"] \arrow[d, "\tilde{P}_o"] & K_o' \arrow[d, "P_o"] \\ & K_1 \arrow[r, "G"] & K_o \end{tikzcd}$$

(v) G hat einen Linksadjungierten, und E ist (diskret) initial stetig bzgl. P_1, $\tilde{P}_o$.

ist äquivalent zu (14.2)(i) - (iv).

Ist E (diskret) initial stetig bzgl P_1, $\tilde{P}_o$, so besitzt E einen Linksadjungierten, derart daß Adjunktionseinheit und -coeinheit punktweise bimorph sind.

(<u>14.5</u>) <u>THEOREM</u>: Es sei $A: S \longrightarrow A$ eine algebraische Theorie (zu $\mathbb{S}$) und $P: K' \longrightarrow K$ eine Top-Kategorie. K habe $\mathbb{S}$-Potenzen, die durch P nach (2.9) erzeugt werden, so daß auch K' (kanonisch ausgewählte) $\mathbb{S}$-Potenzen besitzt. $P_A := \mathrm{Alg}(A,P): \mathrm{Alg}(A,K') \longrightarrow \mathrm{Alg}(A,K)$ sei der durch P induzierte Funktor, so daß mit den Vergißfunktoren V, V' $V \circ P_A = P \circ V'$ gilt. $(\tilde{P}, \tilde{V})$ sei (kanonisches) Pullback zu (V,P) und E die eindeutig bestimmte Faktorisierung. Dann gilt:

(1) $\tilde{P}$ und P_A sind Top-Kategorien, und E, $\tilde{V}$, V' sind initial stetig. Die Rechtsadjungierten zu P_A, $\tilde{P}$, P lassen sich so wählen, daß sie mit V, E, $\tilde{V}$, V' kommutieren.

(2) E bettet die Kategorie $\mathrm{Alg}(A,K')$ der "P-topologischen A-Algebren" voll und bireflexiv in die Kategorie P der "P-prätopologischen A-Algebren" ein.

(3) Es sind äquivalent:

(i) V hat einen Linksadjungierten F.

(ii) $\tilde{V}$ hat einen Linksadjungierten $\tilde{F}$.

(iii) V' hat einen Linksadjungierten F'.

Gilt eine dieser Aussagen, so sind V, $\tilde{V}$, V' monadisch, und F, $\tilde{F}$, F' lassen sich so wählen, daß sie mit den drei Top-Kategorien P, $\tilde{P}$, P_A kommutieren.

(4) K habe für $E \subset K$, E abgeschlossen gegen $\mathbb{S}$-Potenzen, (monomorphe) E-Bilder. Dann gilt mit den Abkürzungen $M := U_K(E)$, $M_P := P^{-1}(M)$, $M_{A,P} := V'^{-1}(M_P)$, $E_{A,P} := V'^{-1}(P^{-1}(E))$:

(a) $\mathrm{Alg}(A,K')$ hat(monomorphe)$E_{A,P}$-Bilder mit

$$U_{\mathrm{Alg}(A,K')}(E_{A,P}) = M_{A,P} \cap \mathrm{Init}_{P_A}(\mathrm{Alg}(A,K') = V'^{-1}(M_P \cap \mathrm{Init}_P(K')).$$

(b) $\mathrm{Alg}(A,K')$ hat $M_{A,P}$-Cobilder, die im Falle $E \subset \mathrm{Epi}(K)$ epimorph sind; es ist $Q_{\mathrm{Alg}(A,K')}(M_{A,P}) = E_{A,P} \cap \mathrm{Fin}_{P_A}(\mathrm{Alg}(A,K'))$.

Speziell hat mit K auch $\mathrm{Alg}(A,K')$ reguläre Bilder, sofern außerdem K Kernpaare oder V einen Linksadjungierten hat.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Alg}(A,K') \arrow[rr, "V'"] \arrow[r, dashed, "E"] \arrow[dr, "P_A"'] & P \arrow[r, "\tilde{V}"] \arrow[d, "\tilde{P}"] & K' \arrow[d, "P"] \\ & \mathrm{Alg}(A,K) \arrow[r, "V"] & K \end{tikzcd}$$

Die Beweise zu (1) - (3) verlaufen kanonisch oder folgen unmittelbar aus dem Vorangehenden. Zu (4) vergleiche man (8.5), (9.7) und (13.5)(7),(8).

In (14.5) wurde darauf verzichtet, Aussagen über die Liftung von Limites und Colimites sowie Kleinheitsaussagen zu formulieren. Sie ergeben sich in evidenter Weise aus (13.5) und (2.9). Außerdem wurde auf die Formulierung von Aussagen über die Existenz von Bildzerlegungen in P verzchtet.

Wir wollen nun unsere Überlegungen auf reflexive Unterkategorien von K' und Alg(A,K) ausdehnen. Dazu zeigt man zunächst allgemein:

(14.6) PROPOSITION: K_1 habe für $M_1 \subset K_1$ epimorphe M_1-Cobilder und sei $Q^{o}_{K_1}(M_1)$-coklein. Außerdem habe K_1 Produkte, und der Funktor G: $K_1 \longrightarrow K_o$ sei Produkt-stetig. Ist nun $K_o' \subset K_o$ eine volle, Iso-abgeschlossene, $Q_{K_o}(G(M_1))$-reflexive Unterkategorie, so ist $K_1' := G^{-1}(K_o') \subset K_1$ voll, Iso-abgeschlossen und $Q^{o}_{K_1}(M_1)$-reflexiv. Hat außerdem G einen Linksadjungierten, so auch die Einschränkung $G' : K_1' \longrightarrow K_o'$.

Die erste der beiden Aussagen beweist man mit Hilfe von (6.3) und (6.4). Die zweite folgt dann aus (6.8) und (8.6).

(14.7) KOROLLAR: A: $S \longrightarrow A$ sei eine algebraische Theorie (zu $\mathfrak{S}$). K habe für $M \subset K$ epimorphe M-Cobilder und Produkte und sei $Q^{o}_{K}(M)$-coklein. $Q^{o}_{K}(M)$ sei abgeschlossen gegen $\mathfrak{S}$-Potenzen. Ist nun I: $K' \hookrightarrow K$ eine volle, Iso-abgeschlossene, $Q^{o}_{K}(M)$-reflexive Unterkategorie, so ist $I_A :=$ Alg(A,I): Alg(A,K') $\longrightarrow$ Alg(A,K) eine Einbettung als volle, Iso-abgeschlossene, $V^{-1}(Q^{o}_{K}(M))$-reflexive Unterkategorie, V: Alg(A,K) $\longrightarrow K$. Hat V einen Linksadjungierten, so auch V': Alg(A,K') $\longrightarrow K'$; im Falle $M \subset$ Mono(K) sind dann Alg(A,K) $\subset [A,K]$ und Alg(A,K') $\subset [A,K']$ reflexiv.

Der Beweis folgt aus (13.5) und (14.6).

Die Überlegungen aus §10 legen den Wunsch nahe, die Existenz freier Algebren auch für deren reflexive (und auch coreflexive) Unterkategorien längs Top-Kategorien zu liften. Dazu notiert man das

(14.8) KOROLLAR: P: $K' \longrightarrow K$ sei eine Top-Kategorie und $L \subset K$ eine X-reflexive bzw. X-coreflexive Unterkategorie (nicht notwendig voll), wobei $X \subset K$ eine Teilklasse ist. Dann ist $L' := P^{-1}(L) \subset K'$ eine $(P^{-1}(X) \cap \mathrm{Fin}_P(K'))$-reflexive bzw. $(P^{-1}(X) \cap \mathrm{Init}_P(K'))$-coreflexive Unterkategorie, und die Einschränkung $L' \longrightarrow L$ von P ist eine Top-Kategorie.

Zum Beweis verwendet man (14.3) bzw. sein Duales. (Man vergleiche (14.8) auch mit (14.6)!)

Wir fassen abschließend die vorangehenden Aussagen zusammen, ohne dabei die volle Allgemeinheit beizubehalten.

$$\text{(14.9.1)}\quad \begin{tikzcd}
L'' \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{Pb.}"] & \mathrm{Alg}(A,K'') \arrow[r, "V''"] \arrow[d, hook, "I_A"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{Pb.}"] & K'' \arrow[d, hook, "I"] & = & K_o \arrow[d, phantom, "\begin{smallmatrix}\cap\\ K_1\\ \cap\\ \vdots\\ \cap\end{smallmatrix}"] \\
L' \arrow[r, hook] \arrow[d, "Q"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{Pb.}"] & \mathrm{Alg}(A,K') \arrow[r, "V'"'] \arrow[d, "P_A"] & K' \arrow[d, "P"'] & = & K_n \\
L \arrow[r, hook] & \mathrm{Alg}(A,K) \arrow[r, "V"'] & K & &
\end{tikzcd}$$

(14.9) THEOREM: A : $S \longrightarrow A$ sei eine algebraische Theorie (zu $\mathfrak{S}$) und P: $K' \longrightarrow K$ eine Top-Kategorie. K habe Produkte und V: Alg(A,K) $\longrightarrow K$ einen Linksadjungierten. $K'' \subset K'$ sei eine Unterkategorie, derart daß eine Folge $K'' = K_o \subset K_1 \subset \ldots \subset K_n = K'$ von vollen, Iso-abgeschlossenen Unterkategrien und eine Folge $E_i \subset \mathrm{Epi}(K_i)$ existiert, so daß $K_{i-1} \subset K_i$ E_i-reflexiv ist, K_i E_i-Bilder hat sowie E_i-coklein ist und E_i abgeschlossen gegen $\mathfrak{S}$-Potenzen ist, $i=1,\ldots,n \in \mathbb{N}$. $L \subset$ Alg(A,K) sei eine volle, Iso-abgeschlossene, $Q^{o}_{\mathrm{Alg}(A,K)}(\mathrm{Mono}(\mathrm{Alg}(A,K)))$-reflexive Unterkategorie. Dann gilt für die Kategorien und Funktoren in (14.9.1):

(1) Alle beteiligten Kategorien haben Produkte. V, V' und V" sind monadisch. P_A und Q sind Top-Kategorien. $L \hookrightarrow \mathrm{Alg}(A,K)$ und $L' \hookrightarrow \mathrm{Alg}(A,K')$ sind Ext-Epi-reflexiv, $L'' \hookrightarrow \mathrm{Alg}(A,K'')$ ist E''-reflexiv mit $E'' := V''^{-1}(E_1 \cap K'')$. $\mathrm{Alg}(A,K'') \hookrightarrow \mathrm{Alg}(A,K')$ und $L'' \hookrightarrow L'$ sind reflexiv. (Alle Unterkategorien sind voll und Iso-abgeschlossen.)

(2) Ist K $(\mathcal{D}$-)vollständig oder Mono-klein oder hat K eine Generatorenmenge, so gilt dies auch für alle übrigen Kategorien. Existiert in K eine Teilklasse $E \subset \mathrm{Epi}(K)$, derart daß E abgeschlossen gegen $\mathfrak{S}$-Potenzen ist und K E-Bilder hat und E-coklein ist, so gilt dies auch für alle anderen Kategorien; sind die in K existierenden E-Bilder monomorph, so existieren außerdem überall Coegalisatoren, so daß dann mit K auch alle übrigen Kategorien $(\mathcal{D}$-)covollständig sind.

(3) Sind in K reguläre Epimorphismen abgeschlossen gegen $\mathfrak{S}$-Potenzen, so haben mit K auch K', $\mathrm{Alg}(A,K)$, $\mathrm{Alg}(A,K')$, L und L' reguläre Bilder.

Beweis: (1) Nach (13.5), (14.5) und (14.7) (sukzessive anzuwenden) sind V, V' und V" monadisch, und I_A hat einen Linksadjungierten. Nach (14.8) und (3.9) ist Q Top-Kategorie und $L' \subset \mathrm{Alg}(A,K')$ $Q^o_{\mathrm{Alg}(A,K')}(\mathrm{Mono}(\mathrm{Alg}(A,K')))$-reflexiv. Nach (13.5) und (8.6) hat $\mathrm{Alg}(A,K'')$ $V''^{-1}(E_1 \cap K'')$-Bilder, so daß wegen $Q^o_{\mathrm{Alg}(A,K')}(\mathrm{Mono}(\mathrm{Alg}(A,K'))) \subset Q^o_{\mathrm{Alg}(A,K')}(I_A(V''^{-1}(U^o_{K_1}(E_1) \cap K'')))$ nach (14.6) $L'' \subset \mathrm{Alg}(A,K'')$ $V''^{-1}(E_1 \cap K'')$-reflexiv ist und $L'' \longrightarrow L'$ einen Linksadjungierten hat.

In ebenso naheliegender Weise folgert man (2) und (3) aus dem Vorangehenden.

(14.10) BEMERKUNGEN:

(1) (14.9) zeigt, daß die Überlegungen aus [16] nicht an die Kategorie

$\mathcal{Me}$ gebunden sind, wenn auch $K = \mathcal{Me}$ der wichtigste Anwendungsfall ist. Wegen des erhöhten "Formulierungsaufwandes" wurde hier darauf verzichtet, wie Ertel "Algebrenkategorien mit Stetigkeit in gewissen Variablenfamilien" zu betrachten, obwohl dadurch keine neuen, prinzipiellen Schwierigkeiten auftreten.

(2) Bei Anwendungen ist es meistens nicht nötig, $K'' \subset K'$ in (14.9) in geeigneter Weise "auszuschöpfen", weil bereits eine passende Epireflexion vorliegt. $\mathit{Comp} \subset \mathit{Top}$ ist allerdings ein wichtiges Gegenbeispiel, das jedoch auch mit (15.10) behandelt werden kann.

(3) In Verbindung mit (10.7) liefert (14.9) im wesentlichen die wichtigsten Resultate aus [79].

(4) Die Einbeziehung coreflexiver Unterkategorien von K' ist für die Anwendungen nicht so wichtig, weil meistens wieder Top-Kategorien über K vorliegen (vgl. [75], [82]). Im übrigen gilt (15.8).

Beispiele zu (14.9) ergeben sich durch Auswahl beliebiger algebraischer Theorien und Top-Kategorien sowie deren Epi-reflexiver Unterkategorien. Zur Illustration formulieren wir einige wenige Aussagen, die aus (14.9) folgen:

Zu jedem topologischen (Hausdorff'schen; vollständig regulären; kompakten; kompakt erzeugten; u.s.w.) Raum existiert eine freie topologische (Hausdorff'sche;...) Gruppe; ebenso für Monoide, Ringe, Loops u.s.w.

In dem folgenden Diagramm besitzen alle Inklusionen einen Reflektor:

$$\begin{tikzcd}
\text{torsionsfreie, kompakte, ab. Gruppen} \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & \text{kompakte, abelsche Gruppen} \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & \text{kompakte Gruppen} \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & \text{kompakte Monoide} \arrow[d, hook] \\
\text{torsionsfreie, topol., ab. Gruppen} \arrow[r, hook] & \text{topologische, abelsche Gruppen} \arrow[r, hook] & \text{topologische Gruppen} \arrow[r, hook] & \text{topologische Monoide}
\end{tikzcd}$$

15. Allgemeiner Liftungssatz für freie Algebren

Neben Top-Kategorien und deren reflexive Unterkategorien gibt es viele weitere Kategorien, über denen die Betrachtung algebraischer Objekte eines festen Typs für den Mathematiker von Interesse ist. Wir beweisen daher hier einen Liftungssatz für freie Algebren, der neben den Beispielen aus §14 auch die folgenden Kategorien einbezieht: Halbgeordnete Mengen, geordnete Mengen, vollständige Verbände, halbmetrische Räume, die Kategorie $\mathcal{M}et_\infty$ (s(6.11)) u.a.
Grundlage des Beweises wird wieder das Adjoint Functor Theorem sein, das man natürlich auch direkt auf den Funktor $V\colon \mathrm{Alg}(A,\mathcal{K}) \longrightarrow \mathcal{K}$ anwenden kann. Aus (6.2)(b) erhält man dann beispielsweise(vgl. [71]):

(15.1) PROPOSITION: Ist $\mathcal{K}$ vollständig und Mono-klein und $V\colon \mathrm{Alg}(A,\mathcal{K}) \longrightarrow \mathcal{K}$ (A algebraische Theorie zu $\mathcal{S}$) Ext-Epi-coklein, so hat V einen Linksadjungierten.

Tatsächlich kann man mit Hilfe von (15.1) für Theorien mit Rang die Existenz freier Algebren für zahlreiche konkrete Kategorien nachweisen, hat jedoch jedesmal eine Cokleinheitsbedingung für V nachzuprüfen (vgl. [71]). Der jetzt zu behandelnde Liftungssatz hat dagegen den Vorteil, daß keine relativen Cokleinheitsbedingungen gestellt werden (es werden lediglich Bedingungen für die Basiskategorien formuliert) und daß keine Rangbeschränkung vorliegt.

Wir fixieren weiterhin eine Teilklasse $\mathcal{S}$ von Kardinalzahlen mit $1 \in \mathcal{S}$.

(15.2) DEFINITION: Der Funktor $D\colon \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}'$ heißt für eine Teilklasse

$\mathcal{E}' \subset \mathcal{K}'$ $(\mathcal{E}',\mathcal{S})$-potenzverträglich, wenn gilt: Ist für $n \in \mathcal{S}$ und $Y \in \mathrm{Ob}\mathcal{K}$ $(Y^n \xrightarrow{p_i} Y,\ i \in n)$ bzw. $(D(Y)^n \xrightarrow{q_i^!} D(Y),\ i \in n)$ eine n-fache Potenz von Y bzw. D(Y) und $k'\colon D(Y^n) \longrightarrow D(Y)^n$ der durch $q_i^! k' = D(p_i)$ bestimmte "Vergleichsmorphismus", so ist $k' \in \mathcal{E}'$.

(15.3) BEMERKUNG: Für eine Teilklasse $\mathcal{M}' \subset \mathcal{K}'$ ist D $(Q^o_{\mathcal{K}'}(\mathcal{M}'),\mathcal{S})$-potenzverträglich, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(a) D erhält $\mathcal{S}$-Potenzen.

(b) D hat einen Rechtsadjungierten P, so daß für alle $n \in \mathcal{S}$ und $Y \in \mathrm{Ob}\mathcal{K}$ $\eta(Y)^n\colon Y^n \longrightarrow P(D(Y)^n)$ in $Q^o_P(\mathcal{M}')$ ist (η Adjunktionseinheit).

(c) D ist der Reflektor einer für $\mathcal{M} \subset \mathcal{K}$ mit $\mathcal{M}' \subset \mathcal{M} \cap \mathcal{K}'$ vollen, $Q^o_{\mathcal{K}}(\mathcal{M})$-reflexiven Unterkategorie $\mathcal{K}' \subset \mathcal{K}$, wobei $Q^o_{\mathcal{K}}(\mathcal{M})$ abgeschlossen gegen $\mathcal{S}$-Potenzen sei.

(d) D ist voll (und treu) und hat einen Rechtsadjungierten, der Retraktionen (Isomorphismen) in $Q^o_{\mathcal{K}'}(\mathcal{M}')$-Morphismen reflektiert.

Beweis: (a) ist trivial und für (b) - (d) benutzt man das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & & P(D(Y)^n) \arrow[dll, "P(q_i^!)"] \\
Y^n \arrow[urr, "\eta(Y)^n"] \arrow[r, "\eta(Y^n)"'] \arrow[d, "p_i"'] & P(D(Y^n)) \arrow[ur, "P(k')"'] \arrow[d, "P(D(p_i))"'] & \\
Y \arrow[r, "\eta(Y)"'] & P(D(Y)) &
\end{tikzcd}$$

$k' \in Q_{\mathcal{K}'}(\mathcal{M}')$ folgt dann im Falle (b) aus (3.3)(3). (c) folgt wie (b). Ist D voll, so ist mit $\eta(Y)$ auch $\eta(Y)^n$ und deshalb auch $P(k')$ eine Retraktion.

Wir fixieren für das folgende die algebraische Theorie $A\colon \mathcal{S} \longrightarrow A$ sowie den Funktor $P\colon \mathcal{K}' \longrightarrow \mathcal{K}$. $\mathcal{K}$ besitze stets $\mathcal{S}$-Potenzen, und P erzeuge sie identitiv.

(15.4) LEMMA: P habe für $M' \subset K'$ einen $(Q^o_{K'}(M'),\$)$-potenzverträglichen Linksadjungierten. Ist dann $Q^o_{K'}(M')$ abgeschlossen gegen $\$$-Potenzen, so auch $Q^o_P(M')$, d.h. mit $e: Y \longrightarrow P(Y')$ ist auch $e^n \longrightarrow P(Y'^n)$, $n \in \$$, in $Q^o_P(M')$.

Den Beweis entnimmt man leicht aus dem folgenden Diagramm:

$$
\begin{tikzcd}
 & P(D(Y^n)) \arrow[rr, "P(k')"] \arrow[ddr, "P(D(p_i))"'] & & P(D(Y)^n) \arrow[ddl, "P(q_i')"] \arrow[dr, "P(e'^n)"] & \\
Y^n \arrow[ur, "\eta(Y^n)"] \arrow[rrrr, "e^n"] \arrow[dd, "p_i"'] & & & & P(Y'^n) \arrow[dd, "P(p_i')"] \\
 & & P(D(Y)) \arrow[drr, "P(e')"] & & \\
Y \arrow[urr, "\eta(Y)"] \arrow[rrrr, "e"'] & & & & P(Y')
\end{tikzcd}
$$

(15.5) PROPOSITION: Für $M' \subset K'$ habe K' epimorphe M'-Cobilder und P einen $(Q^o_{K'}(M'),\$)$-potenzverträglichen Linksadjungierten. Es sei $M' \subset \mathrm{Init}_P(K')$ und $Q^o_{K'}(M')$ abgeschlossen gegen $\$$-Potenzen. In dem kommutativen Diagramm

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Alg}(A,K') \arrow[r, "V'"] \arrow[d, "P_A = \mathrm{Alg}(A,P)"'] & K' \arrow[d, "P"] \\
\mathrm{Alg}(A,K) \arrow[r, "V"] & K
\end{tikzcd}
$$

habe V für $M_A \subset \mathrm{Alg}(A,K)$ mit $P_A(V'^{-1}(M')) \subset M_A \subset V^{-1}(\mathrm{Mono}(K))$ epimorphe M_A-Cobilder. Dann hat V' epimorphe $V'^{-1}(M')$-Cobilder.

Im einzelnen gilt: Ist $f': X' \longrightarrow V'(H')$ in K', so gibt es ein $d: P(X') \longrightarrow V(J)$ in $Q^o_V(M_A)$, einen M_A-Morphismus $\delta: J \longrightarrow P \circ J'$, der punktweise zu $Q^o_P(M')$ gehört, ein $e': X' \longrightarrow V'(J')$ in $Q^o_{V'}(V'^{-1}(M'))$ und ein

$\mu': J' \longrightarrow H'$ in $V'^{-1}(M')$, so daß $f' = V'(\mu')\, e'$ und $P(e') = V(\delta)\, d$ gilt und die folgende universelle Eigenschaft erfüllt ist:

Zu $d_o: P(X') \longrightarrow V(J_o)$, $\delta_o: J_o \longrightarrow P\, J_o'$, $e_o': X' \longrightarrow V'(J_o')$ und $\mu_o': J_o' \longrightarrow H'$ mit den entsprechenden Eigenschaften gibt es eindeutig bestimmte Isomorphismen $\iota: J \longrightarrow J_o$, $\iota': J' \longrightarrow J_o'$ mit $V(\iota)\, d = d_o$, $(P \circ \iota')\, \delta = \delta_o\, \iota$, $V'(\iota')\, e' = e_o'$ und $\mu_o'\, \iota' = \mu'$.

$$
\begin{tikzcd}
 & V(J) \arrow[r, "V(\delta)"] \arrow[dd, dashed, "V(\iota)"] & V(P \circ J') \arrow[dd, dashed, "V(P \circ \iota')"'] \arrow[dr, "V(P \circ \mu')"] & \\
P(X') \arrow[ur, "d"] \arrow[urr, "P(e')"'] \arrow[rrr, "P(f')"] \arrow[dr, "d_o"'] \arrow[drr, "P(e_o')"] & & & V(P \circ H') = P(V'(H')) \\
 & V(J_o) \arrow[r, "V(\delta_o)"'] & V(P \circ J_o') \arrow[ur, "V(P \circ \mu_o')"'] &
\end{tikzcd}
$$

Beweis: Zu $f': X' \longrightarrow V'(H')$ gibt es $d \in Q^o_V(M_A)$ und $\mu: J \longrightarrow P \circ H'$ in M_A mit $P(f') = V(\mu)\, d$, und zu μ gibt es $d_1 \in Q^o_P(M')$ und $m_1': X_1' \longrightarrow H(A^1)$ in M' mit $\mu(A^1) = P(m_1')\, d_1$ (vgl. (4.7)). Durch $J'(A^n) := X_1'^n$, $\delta(A^n) := d_1^n$ und $\mu'(A^n) := m_1'^n$ für alle $n \in \$$ werden dann unter Benutzung von (15.4) mit Hilfe des folgenden Diagramms ein $J' \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Alg}(A,K'))$ sowie $\delta: J \longrightarrow P \circ J'$ und $\mu': J' \longrightarrow H'$ definiert ($\omega \in A(A^n,A^1)$):

$$
\begin{tikzcd}
J(A^n) \arrow[r, "\delta(A^n)"] \arrow[d, "J(\omega)"'] & P(J'(A^n)) \arrow[r, "P(\mu'(A^n))"] \arrow[d, "P(J'(\omega))"'] & P(H'(A^n)) \arrow[d, "P(H'(\omega))"] \\
J(A^1) \arrow[r, "\delta(A^1)"'] & P(J'(A^1)) \arrow[r, "P(\mu'(A^1))"'] & P(H'(A^1))
\end{tikzcd}
$$

Es gilt $\mu = (P \circ \mu')\, \delta$, und wegen $M_A \subset V^{-1}(\mathrm{Mono}(K)) \subset \mathrm{Init}_V(\mathrm{Alg}(A,K))$ ist nach (3.11) $M_A = U^o_V(Q^o_V(M_A))$ und somit nach (3.2)(2) $\delta \in M_A$. Nach Definition ist $\mu' \in V'^{-1}(M')$; wegen $M' \subset \mathrm{Init}_P(K')$ ist μ' sogar punktweise in M' (s.(3.2)(5)). Ebenfalls wegen $M' \subset \mathrm{Init}_P(K')$ gibt es ein $e': X' \longrightarrow V'(J')$ mit $P(e') =$

$= \delta(A^1)\, d$ und $\mu'(A^1)\, e' = f'$. Mit Hilfe der Inklusion $P_A(V'^{-1}(M')) \subset M_A$ weist man leicht $e' \in Q^o_{V'}(V'^{-1}(M'))$ nach. Zur universellen Eigenschaft ist jetzt lediglich noch zu bemerken, daß $\mu_o := (P \circ \mu_o')\, \delta_o$ in M_A ist, woraus sich die Existenz von ι und dann auch von ι' ergibt.

(15.6) KOROLLAR: P sei treu. Ist dann unter den Voraussetzungen von (15.5) V $Q^o_V(M_A)$-coklein und K' $Q^o_{K'}(M')$-coklein, so ist V' $Q^o_{V'}(V'^{-1}(M'))$-coklein.

Beweis (analog zu (7.8)): Ist der Morphismus $e': X' \longrightarrow V'(J')$ in $Q^o_{V'}(V'^{-1}(M'))$, so kann man in der nach (15.5) existierenden Zerlegung $P(e') = V(\delta)\, d$ den Morphismus $d: P(X') \longrightarrow V(J)$ so wählen, daß er in einem festen Vertretersystem nicht-isomorpher $Q^o_V(M_A)$-Morphismen mit Bereich X' liegt. Wählt man weiter für jedes $J \in Ob(Alg(A,K)$ ein Vertretersystem der $Q^o_P(M')$-Morphismen mit Bereich $J(A^1)$ aus (vgl. (5.3)(2)), so erhält man durch Betrachtung der (wegen P treu) injektiven Zuordnung $(e',J') \longmapsto ((d,J), \overline{(\delta(A^1), J'(A^1))})$ (wobei der Querstrich den Übergang zum zugehörigen Vertreter bezeichnet) leicht die Behauptung.

(15.7) THEOREM: $P: K' \longrightarrow K$ sei ein treuer Funktor, der für $M' \subset Mono(K') \cap Init_P(K')$ einen $(Q^o_{K'}(M'), \$)$-potenzverträglichen Linksadjungierten habe. K habe für $M \subset Mono(K)$ epimorphe M-Cobilder und sei $Q^o_K(M)$ - coklein. K' habe Produkte und epimorphe M'-Cobilder und sei $Q^o_{K'}(M')$-coklein. Weiter gelte $P(M') \subset M$, und $Q^o_K(M)$ in K und $Q^o_{K'}(M')$ in K' seien abgeschlossen gegen \$-Potenzen. Hat dann $V: Alg(A,K) \longrightarrow K$ einen Linksadjungierten, so auch $V': Alg(A,K') \longrightarrow K'$ und $Alg(A,P): Alg(A,K') \longrightarrow Alg(A,K)$. Außerdem sind $Alg(A,K) \subset [A,K]$ und $Alg(A,K') \subset [A,K']$ volle, reflexive Unterkategorien, sofern auch K Produkte hat.

Beweis: Weil $Q^o_K(M)$ abgeschlossen gegen \$-Potenzen ist, hat $Alg(A,K)$ mit $M_A := V^{-1}(M)$ epimorphe M_A-Cobilder. Nach (4.7) und (5.3)(2) hat V dann epimorphe M_A-Cobilder und ist $Q^o_V(M_A)$-coklein. Wegen $P(M') \subset M \subset Mono(K)$ gilt $P_A(V^{-1}(M')) \subset M_A \subset V^{-1}(Mono(K))$, so daß (15.5) und (15)(6) anwendbar sind. Damit hat V' nach (6.1) einen Linksadjungierten. Die beiden Reflexionen ergeben sich nach (13.5), und den Linksadjungierten zu P_A konstruiert man entweder mit Hilfe des Reflektors zu $Alg(A,K') \subset [A,K']$ oder wendet (6.8) an.

Als Folgerung ergibt sich unter Beachtung von (15.3)(d), (3.9) und (5.2):

(15.8) KOROLLAR: $K \subset K'$ sei eine volle, Epi-coreflexive Unterkategorie der vollständigen, Mono-kleinen und Epi-cokleinen Kategorie K'. $Epi(K')$ und $Epi(K)$ seien abgeschlossen gegen \$-Potenzen. Hat dann $V: Alg(A,K) \longrightarrow K$ einen Linksadjungierten, so auch $V': Alg(A,K') \longrightarrow K'$, und $Alg(A,K) \subset [A,K]$, $Alg(A,K') \subset [A,K']$ sind reflexiv.

Aus (15.7) erhält man wegen (15.3)(c) außerdem einen weiteren Beweis für eine geringfügig abgeschwächte Version von (14.7).

(15.9) BEMERKUNG: Zum Beweis der Existenz freier Algebren bei beliebiger Basiskategorie kann man natürlich auch anders vorgehen, indem man nämlich zuerst einen Reflektor zu $Alg(A,K) \subset [A,K]$ konstruiert und dann (13.5)(12) anwendet. Nach Freyd-Kelly [20] erhält man für Theorien mit Rang einen solchen Reflektor, wenn K eine vollständige und covollständige Kategorie ist, die für ein $M \subset Mono(K)$ epimorphe M-Cobilder und einen (bzgl. der M-Cobilder) "beschränkten Generator" hat und $Q^o_K(M)$-coklein ist. Wischnewsky [78] hat ergänzend gezeigt, daß mit K auch jede Top-Kategorie über K die Voraussetzungen dieses Kriteriums erfüllt.

Das Kriterium von Freyd - Kelly bezieht insbesondere als Basiskategorien die lokal präsentierbaren Kategorien von Gabriel - Ulmer [21] und somit die Kategorien $Alg(A,\mathcal{Me})$, A algebraische Theorie mit Rang, ein. Für die Betrachtung algebraischer Objekte über algebraischen Kategorien verwendet man jedoch kanonischer das Tensorprodukt (12.11):

(15.10) PROPOSITION: A und B seien algebraische Theorien zu $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}$ regulär. $\mathcal{K}$ habe Produkte und für $\mathcal{E} \subset Epi(\mathcal{K})$, $\mathcal{E}$ abgeschlossen gegen $\mathfrak{S}$-Potenzen, monomorphe $\mathcal{E}$-Bilder und sei $\mathcal{E}$-coklein. Dann sind alle fünf Vergißfunktoren in dem folgenden Diagramm monadisch, sofern $\mathcal{K}$ freie Algebren (zu $\mathfrak{S}$) besitzt:

$$\begin{tikzcd}
Alg(A,Alg(B,\mathcal{K})) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & Alg(B,\mathcal{K}) \arrow[d] \\
Alg(A,\mathcal{K}) \arrow[r] & \mathcal{K}
\end{tikzcd}$$

Beweis: Offenbar ist $Alg(A,Alg(B,\mathcal{K}))$ kanonisch isomorph zur Kategorie $Alg_{bi}(A,B;\mathcal{K})$, die ihrerseits nach (13.3) kanonisch isomorph zur Kategorie $Alg(A \circ B,\mathcal{K})$ ist. Bis auf Isomorphie sind $Alg(A,Alg(B,\mathcal{K})) \longrightarrow Alg(A,\mathcal{K})$ und $Alg(A,Alg(B,\mathcal{K})) \longrightarrow Alg(B,\mathcal{K})$ die durch die Theoriemorphismen $A \longrightarrow A \otimes B$ und $B \longrightarrow A \otimes B$ aus (12.12)(3) induzierten algebraischen Funktoren. Damit folgt alles aus (13.6).

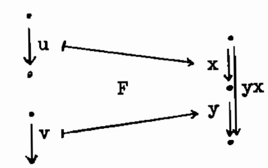
Es ist eine offene Frage, ob (15.10) auch im Falle $\mathfrak{S} = \mathbb{K}$ gültig bleibt. Sie läßt sich sicher dann positiv beantworten, wenn die Konstruktion (12.11) des Tensorprodukts algebraischer Theorien auch für $\mathfrak{S} = \mathbb{K}$ zulässig bleibt. Manes [50] hat für den Fall, daß A oder B die durch $\mathcal{Comp} \longrightarrow \mathcal{Me}$ induzierte algebraische Theorie ist (die keinen Rang hat), das Problem positiv gelöst.

ANHANG: Bilder und Colimites in $\mathcal{Cat}$

Die (Meta-)Kategorie $\mathcal{Cat}$ aller Kategorien ist ein besonders interessantes Beispiel für die Untersuchung von Bildzerlegungen. Auf sehr einfache Weise erhält man allein vier verschiedene Zerlegungen, wobei nur in einem Fall eine Epi-Mono-Zerlegung vorliegt.

Die für den Mathematiker verblüffende, erste Erkenntnis beim Umgang mit Kategorien ist die, daß das mengentheoretische Bild $F(\mathcal{K})$ eines Funktors $F: \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}'$ im allgemeinen keine Unterkategorie von $\mathcal{K}'$ ist. Das zeigt etwa schon der Vergißfunktor $\mathcal{Grp} \longrightarrow \mathcal{Me}$ oder einfacher das folgende

Beispiel 1:



$(yx = F(v)F(u) \notin F(\mathcal{K}))$

Ist $F(\mathcal{K})$ eine Unterkategorie von $\mathcal{K}'$, so heißt F Funktor mit Bild (vgl. [60]). F heißt erzeugend, wenn $\mathcal{K}'$ bereits die von $F(\mathcal{K})$ erzeugte Unterkategorie ist, d.h. wenn jedes $f' \in \mathcal{K}'$ eine Darstellung

$$f' = \prod_{i=1}^{n} F(f_i) \quad , n \in \mathbb{N},$$

besitzt. F heißt kanonisch erzeugend, wenn zusätzlich gilt: Für jeden Funktor $G: \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}''$ mit der Eigenschaft, daß aus $F(f) = F(g)$ stets $G(f) = G(g)$ folgt, gilt: Aus

$$\prod_{i=1}^{n} F(f_i) = \prod_{j=1}^{m} F(g_j) \quad \text{folgt stets} \quad \prod_{i=1}^{n} G(f_i) = \prod_{j=1}^{m} G(g_j) \quad .$$

Offenbar ist F aus Beispiel 1 kanonisch erzeugend.

(A.1) PROPOSITION: $F: \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}'$ sei ein Funktor. Dann gilt:

(1) F ist genau dann surjektiv, wenn F erzeugend ist und ein Bild hat. Ist F erzeugend, so auch surjektiv auf den Objekten.

(2) F ist genau dann erzeugend, wenn F ein extremer Epimorphismus in *Cat* ist.

(3) F ist genau dann kanonisch erzeugend, wenn F ein regulärer Epimorphismus in *Cat* ist.

Ein auf den Objekten surjektiver Funktor ist natürlich im allgemeinen nicht erzeugend. Ein erzeugender Funktor ist im allgemeinen weder surjektiv, wie Beispiel 1 zeigt, noch kanonisch erzeugend, wie das folgende Beispiel zeigt (vgl. [32]):

<u>Beispiel 2</u>:

$$\bullet \xrightarrow{u} \bullet \qquad \xrightarrow{F} \qquad x \circlearrowright \bullet \qquad (xx = x)$$

(<u>A.2</u>) <u>KOROLLAR</u>: *Cat* hat keine regulären Bilder, und reguläre Epimorphismen sind i.a. keine universellen Epimorphismen in *Cat*.

Hätte *Cat* nämlich reguläre Bilder, so wäre Reg-Epi(*Cat*) = Ext-Epi(*Cat*) im Widerspruch zu Beispiel 2. Wäre Reg-Epi(*Cat*)$\subset$ Surj(*Cat*), so hätte *Cat* nach (9.1) (und (A.7)) reguläre Bilder.

(<u>A.3</u>) <u>PROPOSITION</u>: Für folgende Funktorklassen $\mathcal{E}$ besitzt *Cat* $\mathcal{E}$-Bilder:

	$\mathcal{E}$	$U_{Cat}(\mathcal{E})$
(1)	bijektiv auf Objekten und voll (d.h. surjektiver Clone)	treu
(2)	erzeugend	Einbettung (d.h. injektiv)
(3)	bijektiv auf Objekten (d.h.Clone)	treu und voll
(4)	surjektiv auf Objekten	volle Einbettung

Bei (2) faktorisiert man F: $K \longrightarrow K'$ über die von F(K) in K' erzeugte Unterkategorie, und (3) ist die Faktorisierung über das sog. "volle Bild". (1) und (4) ergeben sich durch Hintereinanderausführung von (2) und (3).

Die Liste in (A.3) ist sicherlich nicht vollständig. In ihr fehlt beispielsweise die nach (5.2) (zumindest für kleine Kategorien existierende) Epi-(Ext-Mono)-Zerlegung, zu deren expliziter Konstruktion vermutlich ein intensives Studium von Epi(*Cat*) notwendig ist (vgl. hierzu einige Arbeiten von Isbell und Mitchell).
Auffallend ist ferner, daß unter $\mathcal{E}$ nicht die surjektiven Funktoren erscheinen. Grund: Die Klasse der surjektiven Funktoren ist nicht abgeschlossen unter der Isbell-Korrespondenz, denn die zu den Surjektionen gehörigen Unterobjekte sind gerade die Einbettungen und die dazu gehörigen Quotienten die erzeugenden Funktoren. Dennoch spielen die surjektiven Funktoren eine wichtige Rolle in *Cat*:

(<u>A.4</u>) <u>PROPOSITION</u>: Die universellen Epimorphismen in *Cat* sind gerade die surjektiven Funktoren.

Beweis: Ist F: $K \longrightarrow K'$ ein universeller Epimorphismus in *Cat* und f'$\in$ K', so sei G: $\mathbf{2} := \{\cdot \xrightarrow{x} \cdot\} \longrightarrow K'$ der Funktor mit G(x) = f'. Für ein Pullback $(\tilde{G},\tilde{F})$ zu (F,G) ist nach Voraussetzung $\tilde{F}$ epimorph. Die Surjektivität von F folgt nun dadurch, daß man sich klarmacht, daß Epimorphismen in *Cat* mit Cobereich $\mathbf{2}$ surjektive Funktoren sind.

In *Cat* ergibt sich nun folgende Inklusionskette für die im allgemeinen in Kategorien wichtigsten Epimorphismenklassen:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Surj}(\mathcal{C}at) \arrow[dr, hook] & & \\
\mathrm{Retr}(\mathcal{C}at) \arrow[ur, hook] \arrow[dr, hook] & & Q^{o}(\mathrm{Mono}(\mathcal{C}at)) = \mathrm{Ext\text{-}Epi}(\mathcal{C}at) \arrow[r, hook] & \mathrm{Epi}(\mathcal{C}at) \\
 & \mathrm{Co\text{-}\acute{E}gal}(\mathcal{C}at) = \mathrm{Reg\text{-}Epi}(\mathcal{C}at) \arrow[ur, hook] & &
\end{tikzcd}$$

Dabei sind alle auftretenden Inklusionen echt; Surj($\mathcal{C}at$) und Reg-Epi($\mathcal{C}at$) sind nach Beispiel 1 und 2 nicht(vermöge "$\subset$") vergleichbar.

Für die Konstruktion von Colimites in $\mathcal{C}at$ ist wegen der trivialen Konstruktion von Coprodukten nur die Konstruktion von Coegalisatoren von Interesse. In der Literatur (vgl. [55], [65]) finden sich Beweise, die aber wegen Unübersichtlichkeit oder Verwendung unnötig vieler Hilfsmittel sehr unanschaulich bleiben und daher zur Lösung des Problems, für zwei vorgegebene Funktoren möglichst einfach, konkret und effektiv einen Coegalisator zu konstruieren, weniger hilfreich sind.
Der Grund für die Schwierigkeit, Coegalisatoren in $\mathcal{C}at$ zu konstruieren, liegt darin, daß eine strukturverträgliche Äquivalenzrelation auf einer Kategorie i.a. noch nicht die Bildung einer Quotientenkategorie gestattet, und das wiederum hängt unmittelbar damit zusammen, daß nicht jeder Funktor ein Bild hat.

Man nennt eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf einer Kategorie K kompatibel, wenn aus $u \sim v$ stets $\mathrm{Ber}(u) \sim \mathrm{Ber}(v)$, $\mathrm{Cob}(u) \sim \mathrm{Cob}(v)$ und aus $u_1 \sim u_2$, $v_1 \sim v_2$ stets $u_1v_1 \sim u_2v_2$ (falls definiert) folgt. $\sim$ heißt normal, wenn man ein Vertretersystem der $\sim$-Äquivalenzklassen $K/_\sim$ derart zu einer Kategorie machen kann, daß die kanonische Projektion $P: K \longrightarrow K/_\sim$ ein Funktor ist (vgl. [60]). Natürlich folgt aus "normal" "kompatibel", aber nicht umgekehrt. $\sim$ ist genau dann normal, wenn $\sim$ die durch einen Funktor $F: K \longrightarrow K'$ mit Bild induzierte Äquivalenzrelation ist. Kompatible Äquivalenzrelationen sind durchschnittsstabil, nicht aber normale.

In Kategorienbüchern wird die Unterscheidung zwischen kompatibel und normal meistens dadurch umgangen, daß man von vornherein nur objekttreue Relationen $R \subset K \times K$ betrachtet: Aus $(A,B) \in R$ folgt schon $A = B$ für alle $A, B \in \mathrm{Ob}K$. Für objekttreue Äquivalenzrelationen $\sim$ stimmen die Begriffe normal und kompatibel überein. $P: K \longrightarrow K/_\sim$ ist dann ein Clone. Wir notieren jetzt zunächst das triviale

(A.5) LEMMA: Über einer objekttreuen Relation in einer Kategorie liegt stets eine kleinste kompatible Äquivalenzrelation. Diese ist wieder objekttreu und somit normal.

Ist R die vorgegebene Relation, so ist die kompatible Hülle einfach die kleinste, über

$\bar{R}$:= $\{(xry, xsy):\ x, y \in K,\ (r,s) \in R,\ xry$ und xsy sind definiert$\}$

liegende Äquivalenzrelation.
In §12 haben wir eine etwas allgemeinere Version von (A.5) benutzt: Ist $\mathcal{E}$ eine durchschnittsstabile Eigenschaft für Relationen auf einer Kategorie K und gibt es mindestens eine objekttreue, kompatible Äquivalenzrelation auf K mit der Eigenschaft $\mathcal{E}$, so gibt es eine kleinste kompatible Äquivalenzrelation auf K mit der Eigenschaft $\mathcal{E}$. Diese ist objekttreu und normal.
Aus (A.5) folgt sofort das

(A.6) LEMMA: Sind K_o und K_1 Kategorien und ist $\phi: K_o \longrightarrow K_1$ ein Morphismus der zugrundeliegenden (gerichteten) Graphen, so gibt es einen Funktor $P: K_1 \longrightarrow K_\phi$ mit den Eigenschaften:
(1) $P \circ \phi : K_o \longrightarrow K_\phi$ ist ein Funktor.

(2) Für jeden Funktor $F: K_1 \longrightarrow K_2$, derart daß $F\cdot\phi: K_o \longrightarrow K_2$ ein Funktor ist, gibt es genau einen Funktor $\overline{F}: K_\phi \longrightarrow K_2$ mit $P\cdot\overline{F} = F$.

((1) und (2) ordnen sich (6.5) unter.)

Beweis: Man betrachtet auf K_1 die Relation $R_1 = \{(\phi(g_o f_o), \phi(g_o)\,\phi(f_o)) : f_o, g_o \in K_o, g_o f_o \text{ definiert}\}$ und wendet (A.5) an.

Die Kategorie der kleinen (gerichteten) Graphen läßt sich als Funktorkategorie $[\{\cdot \rightrightarrows \cdot\}, \mathcal{M}e]$ darstellen. In ihr werden also Coegalisatoren wie üblich "punktweise" konstruiert. Diese Konstruktion führt man für große Graphen völlig analog durch. Daraus folgt dann mit (A.5) und (A.6):

(A.7) **THEOREM:** In der Kategorie *Cat* existieren Coegalisatoren.

Beweis: Zu $F, F': K_o \longrightarrow K_1$ konstruiert man zunächst den Coegalisator $\gamma: K_1 \longrightarrow G$ der zugrundeliegenden Graphenmorphismen, sodann die Einbettung $\iota: G \longrightarrow F_G$ in die freie, von G erzeugte Kategorie und schließlich den Funktor $P: F_G \longrightarrow K_{\iota\cdot\gamma}$ aus (A.6). Man prüft trivial nach, daß der Funktor $P\cdot\iota\cdot\gamma$ Coegalisator zu F, F' ist.

$$K_o \underset{F'}{\overset{F}{\rightrightarrows}} K_1 \xrightarrow{\gamma} G \xrightarrow{\iota} F_G \xrightarrow{P} K_{\iota\cdot\gamma}$$

LITERATURHINWEISE

[1] Bäni, W.: Über Ringe, welche dicht in ihrer Modulkategorie sind. Manuscripta math. 10, 379-394 (1973).

[2] Barr, M.: Coequalizers and free triples. Math. Z. 116, 307-322 (1970).

[3] -, Grillet, P.A., van Osdol, D.H.: Exact categories and categories of sheaves. Lect. Not. in Math. 236 (1971).

[4] Bastiani, A., Ehresmann, C.: Categories of sketched structures. Cahier Topo. Geo. diff. XIII, 2., 105-214 (1972).

[5] Baumgartner, K.: Categories admitting free algebras. Preprint, Ruhr-Universität Bochum (1972).

[6] Beck, J.: Triples, algebras and cohomology. Thesis, Columbia University (1967).

[7] Birkhoff, G.: On the structures of abstract algebras. Proc. Camb. Phil. Soc. 31, 433-454 (1935).

[8] Bourbaki, N.: Théorie des ensembles, Chap. 4. Hermann, Paris (1957).

[9] Cohn, P.M.: Universal algebra. Harper and Row, New York (1965).

[10] Dubuc, E.: Adjoint triangles. Lect. Not. in Math. 61, 69-91 (1968).

[11] Duskin, J.: Variations on Beck's tripleability criterion. Lect. Not. in Math. 106, 74-139 (1969).

[12] Dwinger, P.: The amalgamation problem from a categorical point of view. Proc. of the conf. of universal algebra 1969, Queens University Kingston , 190-210 (1970).

[13] Dyckhoff, R.: Factorisation theorems and projective spaces in topology. Math. Z. 127, 256-264 (1972).

[14] Ehrig, H.: F-Morphismen. Preprint, TU Berlin (1972).

[15] Eilenberg, S., Moore, J.C.: Adjoint functors and triples. Ill. J. of Math. 9, 381-398 (1965).

[16] Ertel, H.-G.: Algebrenkategorien mit Stetigkeit in gewissen Variablenfamilien. Dissertation, Universität Düsseldorf (1972).

[17] Felscher, W.: Birkhoffsche und kategorische Algebra. Math. Ann. 180, 1-25 (1969).

[18] - : Equational classes, clones, theories and triples. Preprint, Universität Freiburg (1973).

[19] Freyd, P.: Abelian categories. Harper and Row, New York (1964).

[20] - , Kelly, G.M.: Categories of continous functors, I. J. of Pure a. Appl. Alg. 2, 169-191 (1972).

[21] Gabriel, P., Ulmer, F.: Lokal präsentierbare Kategorien. Lect. Not. in Math. 221 (1971).

[22] Godement, R.: Théorie des faisceaux. Hermann, Paris (1958).

[23] Gray, J.W.: Fibred and cofibred categories. Proc. of the Conf. on Cat. Alg.,La Jolla 1965, 21-83 (1966).

[24] Grégoire, P., Schreiden, A.: Généralisation de la notion de produit amalgame et application a des catégories concrètes. Bull. de la Soc. Royale des Sci. de Liège, 11-12, 543-554 (1971).

[25] Greve, G.: Kategorien und Lie-Algebren. Diplomarbeit in Vorbereitung, Universität Münster (1974).

[26] Herrlich, H.: Topologische Reflexionen und Coreflexionen. Lect. Not. in Math. 78 (1968).

[27] - : Algebraic categories. An axiomatic approach. Preprint, University of Florida (1969).

[28] Herrlich, H.: Factorizations of morphisms f: B —— FA. Math.Z. 114, 180-186 (1970).

[29] - : A characterization of k-ary algebraic categories. Manuscripta math. 4, 277-284 (1971).

[30] - , Strecker, G.E.: Coreflective subcategories. Transactions AMS 157, 205-226 (1971).

[31] Herrlich, H.: Perfect subcategories and factorizations. Preprint, Universität Bremen (1972).

[32] - : Regular categories and regular functors. Erscheint in Canad. J. Math. (1974).

[33] - : Topological functors. Preprint, Universität Bremen (1973).

[34] - : A concept of nearness. Erscheint in Gen. Top. Appl. (1974).

[35] - , Pfender, M.: Axiomatische Theorie algebraischer Funktoren. Handschriftliches Manuskript (1973).

[36] Hoffmann, R.E.: Die kategorielle Auffassung der Initial- und Finaltopologie. Dissertation, Ruhr-Universität Bochum (1972).

[37] Howlett, C., Schumacher, D.: Free finitary algebras in a complete cartesian closed category. Canad. Math. Bull. 15, 373-374 (1972).

[38] Isbell, J.R.: Some remarks concerning categories and subspaces. Canad. J. Math. 9, 563-577 (1957).

[39] - : Subobjects, adequacy, completeness and categories of algebras. Rozprawy Mat. 36, 1-32 (1964).

[40] Kaput, J.J.: Locally adjunctable functors. Ill. J. Math. 16, 86-94 (1972).

[41] Kelly, G.M.: Monomorphisms, epimorphisms and pullbacks. J. Austral. Math. Soc. 9, 124-142 (1969).

[42] Kennison, J.F.: Full reflective subcategories and generalized covering spaces. Ill. J. of Math. 12, 353-365 (1968).

[43] - : Coreflection maps which resemble universal coverings. Lect. Not. in Math. 86, 46-75 (1969).

[44] Kleisli, H.: Every standard construction is induced by a pair of adjoint functors. Proc. AMS 16, 544-546 (1965).

[45] Lawvere, F.W.: Functorial semantics of algebraic Theories. Thesis, Columbia University (1963).

[46] Linton, F.E.J.: Some aspects of equational categories. Proc. of the Conf. on Cat. Alg., La Jolla 1965, 84-94 (1966).

[47] - : An outline of functorial semantics. Lect. Not. in Math. 80, 7-72 (1969).

[48] - : Coequalizers in categories of algebras. Lect. Not. in Math. 80, 75-90 (1969).

[49] Mac Lane, S.: Kategorien. Springer, Berlin-Heidelberg-New York (1972).

[50] Manes, E.: A triple theoretic construction of compact algebras. Lect. Not in Math. 80, 91-118 (1969).

[51] Maranda, J.-M.: On fundamental constructions and adjoint functors. Canad. Math. Bull. 9, 581-591 (1966).

[52] Paré, R.C.: Absolute coequalizers. Lect. Not. in Math. 86, 132-145 (1969).

[53] Pareigis, B.: Kategorien und Funktoren. Teubner, Stuttgart (1969).

[54] Pfender, M.: Kongruenzen, Konstruktion von Limites und Cokernen und algebraische Kategorien. Dissertation, TU Berlin (1971).

[55] - : Universelle Algebra in monoidalen Kategorien. Preprint, TU Berlin (1973).

[56] Porst, H.-E.: Algebraische Kategorien und Dualitäten. Dissertation, Universität Bremen (1972).

[57] Pumplün, D.: Das Tensorprodukt als universelles Problem. Math.Ann. 171, 247-262 (1967).

[58] - : Eine Bemerkung über Monaden und adjungierte Funktoren. Math. Ann. 185, 329-337 (1970).

[59] - : Universelle und spezielle Probleme. Math. Ann. 198, 131-146 (1972).

[60] - : Kategorien. Vorlesungsausarbeitung, Universität Münster (1973).

[61] - , Tholen, W.: Covollständigkeit vollständiger Kategorien. Manuscripta math. 11, 127-140 (1974).

[62] Ringel, C.M.: Diagonalisierungspaare I. Math. Z. 117, 248-266 (1970).

[63] - : Diagonalisierungspaare II. Math. Z. 122, 10-32 (1971).

[64] - : The intersection property of amalgamations. J. of Pure a. Appl. Alg. 2, 341-342 (1972).

[65] Schubert, H.: Kategorien I, II. Heidelberger Taschenbücher 65, 66, Springer, Berlin-Heidelberg-New York (1970).

[66] - : Tripel. Preprint, Universität Düsseldorf (1970).

[67] Schumacher, D.: Minimale und maximale Tripelerzeugende und eine Bemerkung zur Tripelbarkeit. Arch. d. Math. XX, 356-364 (1969).

[68] - : Zur Existenz freier Algebren einer r-dimensionalen Theorie. Manuscripta math. 3, 227-236 (1970).

[69] Taylor, J.C.: Weak families of maps. Canad. Math. Bull. 8, 771-781 (1965).

[70] Tholen, W.: Zur Theorie der Monaden. Diplomarbeit, Universität Münster (1971).

[71] - : Universelle topologische Algebra über beliebigen Kategorien. Preprint, Universität Münster (1972).

[72] Tholen, W.: Relative Bildzerlegungen. Preprint, Universität Münster (1973).

[73] Ulmer, F.: Properties of dense and relative adjoint functors. J. of Alg. 8, 77-95 (1968).

[74] Volger, H.: Über die Existenz von freien Algebren. Math. Z. 106, 312-320 (1968).

[75] Wischnewsky, M.B.: Partielle Algebren in Initialkategorien. Math. Z. 127, 83-91 (1972).

[76] - : Generalized universal algebra in initialstructure categories. Algebra-Berichte Nr. 10, Universität München (1973).

[77] - : Aspects of categorical algebra in initialstructure categories. Preprint, Universität München (1973).

[78] - : On the boundedness of initialstructure categories. Erscheint in Manuscripta math. (1974).

[79] - : On regular topological algebras over arbitrary base-categories. Algebra-Berichte Nr. 16, Universität München (1973).

[80] Wyler, O., Ehrbar, H.: On subobjects and images in categories. Preprint, Carnegie-Mellon University (1968).

[81] Wyler, O.: Trip and Junc. Preprint, Carnegie-Mellon University (1970).

[82] - : On the categories of general topology and topological algebra. Arch. d. Math. XXII, 7-17 (1971).

[83] - : Relative functorial semantics. Change of base in functorial semantis. Preprint, Carnegie-Mellon University (1973).

[84] - : The Zassenhaus Lemma for Categories. Arch. d. Math. XXII, 561-569 (1971).

Lebenslauf

Als Sohn des Arztes Dr. Bernhard Tholen und seiner Ehefrau Hildegard, geborene Kennepohl, wurde ich am 13. Oktober 1947 in Meppen (Ems) geboren. Nach dem Besuch der Grundschule in Dalum (Kreis Meppen) besuchte ich ab Ostern 1958 den altsprachlichen Zweig des Gymnasiums in Meppen. Mein Mathematikstudium begann ich nach dem Abitur im Herbst 1966 an der Universität Münster, wo ich auch im Oktober 1971 mit dem Nebenfach Mathematische Logik die Diplomprüfung ablegte. Nachdem ich schon seit dem Sommersemester 1969 eine Tutorenstelle innehatte, übernahm ich nun bis zum September 1972 die Verwaltung einer wissenschaftlichen Assistentenstelle. Seitdem wurde meine Promotion durch ein Stipendium der Studienstiftung des Deutschen Volkes gefördert.

Meine mathematische Ausbildung verdanke ich - schon seit Beginn meines Studiums - ganz besonders Herrn Professor Pumplün und des weiteren den Herren Professoren Gundlach, Remmert, Thoma, Nastold, Koecher, Petersson, Werner, Schmitz und Rödding.

Am 5. März 1971 heiratete ich die Lehrerin Mechthild Tholen, geborene Röttger, und wohne seitdem in Handorf (Kreis Münster).

Walter Tholen